Équation des tangentes et approximation affine

Équation des tangentes à une courbe

On a vu que l'équation point-pente d'une droite de pente m qui passe par le point (x_1, y_1) est

$$y = y_1+m(x-x_1).$$

Si on cherche l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$, on a tout simplement $x_1 = a$, $y_1 = f(a)$ et $m = f'(a)$. L'équation de cette tangente est donc

$$\boxed{y = f(a)+f'(a)(x-a).}$$

Exemple 1 : Quelle est l'équation de la tangente à la courbe $y = xe^x$ qui passe par le point $(1, e)$? On a $f(x) = xe^x$, donc $f'(x) = (x+1)e^x$ et $a = 1$, d'où $f(a) = e$ et $f'(a) = 2e$. L'équation est donc

$$y = e+2e(x-1) = 2ex-e.$$

Exemple 2 : Quelle est l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2+2x+3$ qui a une pente $m = 6$? On a ici $f(x) = x^2+2x+3$, donc $f'(x) = 2x+2$. Puisque $m = f'(a)$, il faut que l'on ait $2a+2 = 6$, c'est-à-dire $a = 2$. Ceci donne $f(a) = 11$ et l'équation est

$$y = 11+6(x-2) = 6x-1.$$

L'approximation affine ou linéaire

Supposons que la fonction $f(x)$ ait une dérivée au point a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Cela veut dire que pour $|h|$ raisonnablement petit, on doit avoir

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

ou encore

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h.}$$

C'est ce qu'on appelle l'approximation affine ou linéaire (cela dépend des auteurs).

Exemple. On veut calculer $\sqrt{4.2}$. En prenant $a = 4$, $h = 0.2$, $f(x) = \sqrt{x}$ et donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, on obtient la valeur approximative

$$\sqrt{4.2} = \sqrt{4+0.2} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0.2 = 2.05.$$

L'erreur par rapport à la valeur exacte (2.04939...) est très faible : environ 0.0006.

Approximation affine et équation de la tangente

On peut mieux visualiser l'approximation affine en posant $a+h = x$ et donc $h = x-a$: cela donne l'approximation sous la forme

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).}$$

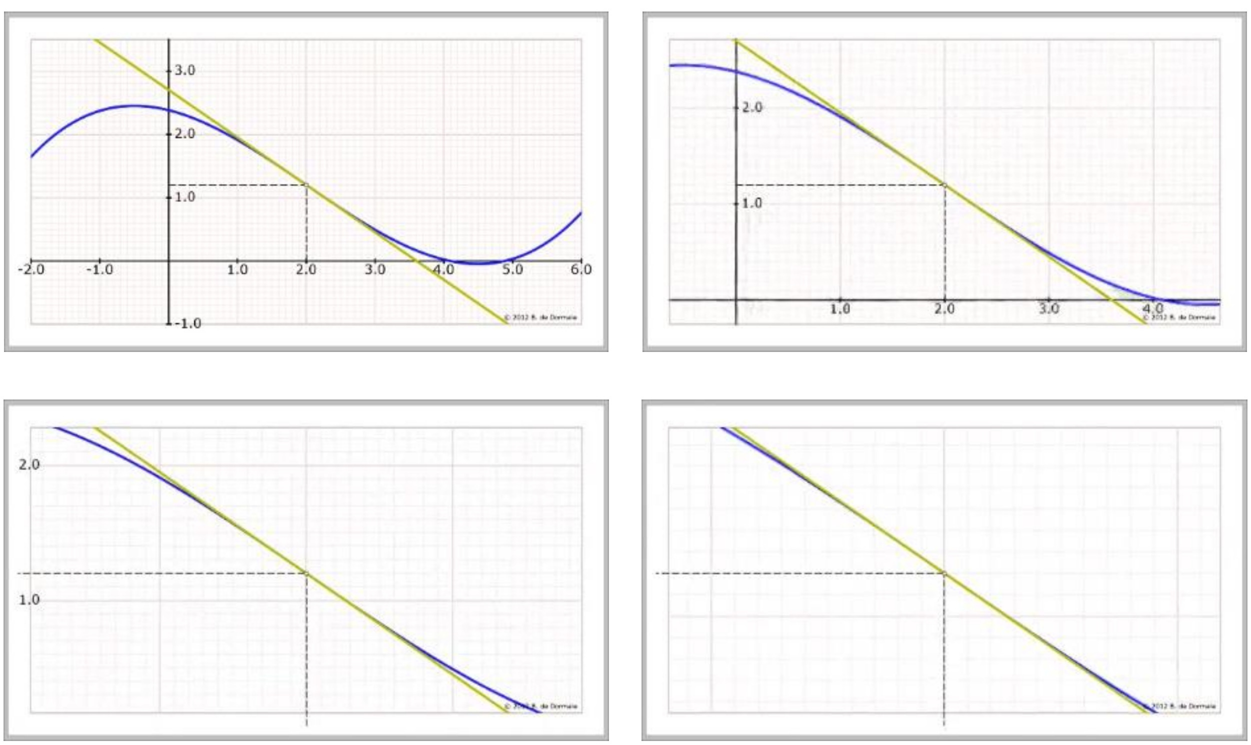
On peut alors bien comprendre le sens de l'approximation, car la courbe

$$y = f(x)$$

est, bien sûr, le graphe de la fonction, alors que

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

est, on l'a vu, l'équation de la tangente au graphe au point (a, $f(a)$). Donc, l'approximation affine consiste, pour une valeur de x donnée, à prendre la valeur de y correspondante sur la tangente plutôt que sur le graphe. On remarque que, plus on prend x proche de a, plus la tangente est proche du graphe et donc meilleure est l'approximation. Pour nous en convaincre, faisons un zoom sur le graphe d'une fonction (en bleu) et sa tangente (en jaune) :



Exemple. Retournons au calcul approximatif de $\sqrt{4.2}$. L'équation point-pente de la tangente au graphe $y = \sqrt{x}$ au point (4, 2) est

$$y = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) = 2 + \frac{1}{4}(x-4).$$

Avec x = 4.2, cela donne

$$y = 2 + \frac{1}{4}(4.2-4) = 2.05,$$

qui est une valeur approximative de $\sqrt{4.2}$.

Note historique : les différentielles

Prenons une fonction $y = f(x)$. Si on donne un accroissement Δx à x, l'accroissement correspondant de y sera $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$. Selon l'approximation affine,

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x)\Delta x.}$$

Certains auteurs utilisent la notation dy pour désigner cette approximation et posent $dx = \Delta x$. Donc, par définition,

$$\boxed{dy = f'(x)dx.}$$

Ces auteurs appellent dx et dy les différentielles de x et de y, respectivement. Le concept et la notation remontent au début du calcul différentiel : à l'époque, on pensait que pour un accroissement *infiniment petit* dx de x (la notation[1] dx était utilisée pour faire la différence avec un accroissement *fini* Δx), l'accroissement correspondant de y, lui aussi *infiniment petit,* était essentiellement[2] dy.

Exemple. Prenons $y = f(x)$, où $f(x) = \sqrt{x}$ et donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Avec $x = 4$ on aura $y = \sqrt{4} = 2$ et $dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}dx = \frac{dx}{4}$. Si on prend $dx = 0.2$ (pour avoir $x+dx = 4.2$), ceci donne $dy = 0.05$. La valeur approximative de $\sqrt{x+dx} = \sqrt{4.2}$ est donc $y+dy = 2+0.05 = 2.05$.

---

[1] Cette notation est due à Leibniz.

[2] En négligeant ce qu'on appelait en ce temps-là les « infiniment petits d'ordre supérieur ».