Formules de base

Formules de base

Le tableau suivant résume les formules de base de la dérivation :

Fonction	Dérivée
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = cg(x)$	$f'(x) = cg'(x)$
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Applications

Ces règles permettent de calculer les dérivées de tous les polynômes. Par exemple, si

$$f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2,$$

alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 \\ &= 15x^2 + 8x + 3 \end{aligned}.$$

Preuves

Le premier résultat est évident : si $f(x) = c$, alors $f(x+h) = c$, et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Les troisième et quatrième résultats sont des conséquences directes des propriétés des limites :

$$\lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h} = \lim_{h \to 0} c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si la dernière limite existe et

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \pm [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

si les deux dernières limites existent.

La preuve du deuxième résultat est basée sur la formule du binôme de Newton. On l'omettra.