La dérivée d’une fonction

Pente d’une tangente à une courbe

Comme on l’a vu, pour calculer la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point $(a, f(a))$, on calcule d’abord la pente de la sécante qui passe par ce point et par un autre point $(x, f(x))$:

$$m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On prend ensuite la limite de cette quantité quand x tend vers a :

$$\boxed{m_{tg} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.}$$

Vitesse moyenne d’un mobile

Si on veut calculer la vitesse instantanée au temps a d’un mobile de trajectoire $s = f(t)$, on peut commencer par calculer sa vitesse moyenne sur un intervalle de temps fini entre l’instant a et une autre valeur du temps t :

$$v_{moy} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

On peut prendre ensuite la limite de cette quantité quand t tend vers a :

$$\boxed{v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.}$$

Dérivée d’une fonction

Dans ces deux contextes différents (et dans bien d’autres), on utilise exactement la même formule. On a donc décidé de donner un nom à cette formule qui revient si souvent : on l’appelle la dérivée de la fonction *f*.

Définition : Soit $f(x)$ une fonction définie au voisinage du point $x = a$. Sa dérivée en ce point est

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

si la limite existe.

Formulation équivalente

Si on fait le changement de variable $x = a + h \Leftrightarrow h = x - a$, en remarquant que $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$, on obtient la formule équivalente

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(on utilise aussi Δx au leu de h). En remplaçant a par x, cette formule permet d'exprimer la <u>fonction dérivée</u> de $f(x)$, qui à x fait correspondre $f'(x)$:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a la fonction dérivée $f'(x) = 3x^2$ et pour $f(x) = \sin x$, on a fonction dérivée $f'(x) = \cos x$.

Autres notations

Étant donné qu'on est habitué à écrire $y = f(x)$, on trouve souvent la notation y' au lieu de $f'(x)$. On rencontre aussi très souvent les notations $\dfrac{dy}{dx}$ (qui rappelle que la dérivée est la limite d'un quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$), $\dfrac{df(x)}{dx}$ ou $\dfrac{d}{dx} f(x)$.