La dérivée de $f(ax)$ est $af'(ax)$: exemples

Pour nous convaincre que la formule

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(ax) = af'(ax)}$$

a un sens, faisons quelques exemples où on peut vérifier la réponse en calculant la dérivée d'une autre manière.

Exemple 1 : Quelle est la dérivée de $(2x)^5$?

Solution : On a $(2x)^5 = 2^5 x^5$, donc

$$\frac{d}{dx}(2x)^5 = 2^5(x^5)' = 2^5 \cdot 5x^4 = 160x^4 .$$

Selon la formule,

$$(x^5)' = 5x^4 \Rightarrow \frac{d}{dx}(2x)^5 = 2 \cdot 5(2x)^4 = 2 \cdot 5 \cdot 2^4 x^4 = 160x^4 ,$$

ce qui est bien la même chose.

Exemple 2 : Quelle est la dérivée de $\ln(6x)$?

Solution : D'après la formule,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(6x) = 6\frac{1}{6x} = \frac{1}{x} .$$

C'est évidemment la bonne réponse, puisque

$$\ln(6x) = \ln 6 + \ln x \Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(6x) = 0 + (\ln x)' = \frac{1}{x} .$$

Exemple 3 : Montrer que $\frac{d}{dx}e^{2x} = 2e^{2x}$, $\frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$, et $\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}$.

Solution : On a $e^{2x} = e^x e^x$ et donc

$$\frac{d}{dx}e^{2x} = (e^x)'e^x + e^x(e^x)' = e^xe^x + e^xe^x = 2e^{2x} .$$

Aussi, $e^{3x} = e^{2x}e^x$, d'où

$$\frac{d}{dx}e^{3x} = (e^{2x})'e^x + e^{2x}(e^x)' = 2e^{2x}e^x + e^{2x}e^x = 3e^{3x} .$$

Finalement,

$$\frac{d}{dx}e^{-x} = \frac{d}{dx}\frac{1}{e^x} = -\frac{(e^x)'}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x} .$$

<u>Exemple 4</u> : Selon la formule,

$$(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \frac{d}{dx}\cos(2x) = -2\sin(2x) .$$

Montrer que c'est vrai.

<u>Solution</u> : On a

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x .$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^2 x &= (\sin x)'\sin x + \sin x(\sin x)' \\ &= \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ &= 2\sin x \cos x = \sin(2x)\end{aligned} .$$

Donc,

$$\frac{d}{dx}\cos(2x) = 0 - 2\frac{d}{dx}\sin^2 x = -2\sin(2x) .$$

Exercice : Montrez qu'on a bien $\frac{d}{dx}\sin(2x) = 2\cos(2x)$.