Exposants et radicaux

Exposants entiers et radicaux

Si b est un nombre réel et si n est un entier positif, alors

$$\boxed{b^n = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \cdot b \cdot b \qquad (n \text{ facteurs})}$$

(à noter que $b^1 = b$); si b est non nul, par convention on pose

$$\boxed{b^0 = 1}$$

et on définit les exposants négatifs par

$$\boxed{b^{-n} = \frac{1}{b^n}}$$

Par exemple, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $5^0 = 1$ et $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

La racine nième de b est un nombre $\sqrt[n]{b}$ tel que

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b}$$

Si <u>n est pair</u>, on doit avoir $b \geq 0$ et <u>par définition</u> $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Ainsi, $\sqrt{9} = 3$, pas ±3 (plus généralement $\sqrt{a^2} = |a|$, pas $\pm a$) et les solutions de l'équation $x^2 = 9$ sont $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Si n est impair, il n'y a pas de contrainte sur b : $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Exposants fractionnaires

Pour un nombre réel a positif, on peut définir des exposants fractionnaires de la manière suivante : si p et q sont des entiers positifs, alors

$$\boxed{a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}}$$

(en particulier $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$) et

$$\boxed{a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}}$$

Ainsi, $64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$, $3^{2/5} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$ et $3^{-2/5} = \frac{1}{3^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{9}}$.

On peut alors étendre la définition à des exposants réels par un processus de limite.

Lois des exposants

Soient a et b des nombres réels positifs et x et y des nombres réels quelconques. On a les propriétés suivantes :

Lois des exposants		
Propriété	Exemple	Visualisation
$a^x a^y = a^{x+y}$.	$8^3 8^2 = 8^5$.	$a\times a\times a \times a\times a = a\times a\times a\times a\times a$
$a^x/a^y = a^{x-y}$.	$7^5/7^2 = 7^3$.	$a\times a\times a\times a\times a \div (a\times a) = a\times a\times a$
$(a^x)^y = a^{xy}$.	$(9^3)^2 = 9^6$ (pas 9^5 !).	$a\times a\times a \times a\times a\times a = a\times a\times a\times a\times a\times a$
$a^x b^x = (ab)^x$	$2^3 4^3 = 8^3$.	$a\times a\times a \times b\times b\times b = ab\times ab\times ab$
$a^x/b^x = (a/b)^x$	$7^3/2^3 = (7/2)^3$.	$a\times a\times a \div (b\times b\times b) = (a\div b)\times(a\div b)\times(a\div b)$

Ces lois sont très importantes et il faut non seulement les connaitre mais bien les comprendre.

Exemples

<u>Exemple 1</u> : Calculer a) $8^{-2/3}$ et b) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{125}}$.

<u>Réponse</u> : a) $8^{-2/3} = \dfrac{1}{8^{2/3}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$. b) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{-3}{5}$.

<u>Exemple 2</u> : Simplifier $\sqrt[4]{81x^6y^8}$

<u>Réponse</u> : $\sqrt[4]{81x^6y^8} = \sqrt[4]{81}\,x^{6/4}y^{8/4} = 3x^{3/2}y^2$

<u>Exemple</u> 3 : Rendre le dénominateur de $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ rationnel.

<u>Réponse</u> : $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5\cdot 3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$