Fractions algébriques

Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont des quotients de polynômes. Elles se manient essentiellement comme les fractions ordinaires :

Opérations sur les fractions rationnelles	
Opération	Exemple
$\frac{P(x)}{Q(x)} \pm \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)S(x) \pm R(x)Q(x)}{Q(x)S(x)}$	$\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x-1} = -\frac{x^4+x^2}{x^2-1}$
$\frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)R(x)}{Q(x)S(x)}$	$\frac{x^2}{x+1} \times \frac{x^3}{x-1} = \frac{x^5}{x^2-1}$
$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)S(x)}{Q(x)R(x)}$	$\frac{x^2}{x+1} \div \frac{x^3}{x-1} = \frac{x-1}{x(x+1)}$

La principale différence, c'est qu'il faut exclure les valeurs de x auxquelles un des dénominateurs s'annule.

Fractions algébriques

On peut aussi rencontrer des fractions plus générales qui font par exemple intervenir des radicaux, etc... Un des problèmes qui peut se poser est de rendre rationnel le numérateur ou le dénominateur d'une telle expression.

<u>Exemple 1</u> : Rationaliser le numérateur de $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{x+2}$.

<u>Solution</u> : Pour se débarrasser des racines carrées, on exploite l'identité $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$: on multiplie en haut et en bas par le <u>conjugué</u> du numérateur, c.-à-d. par $\sqrt{x}-\sqrt{7}$, ce qui donne $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{x+2} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{7})(\sqrt{x}-\sqrt{7})}{(x+2)(\sqrt{x}-\sqrt{7})} = \frac{x-7}{(x+2)(\sqrt{x}-\sqrt{7})}$. À remarquer que l'égalité n'est pas valide pour $x=7$ (en plus de $x=-2$).

<u>Exemple 2</u> : Rationaliser le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$.

<u>Solution</u> : On a $\frac{1}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{x+h-x} = \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{h}$.