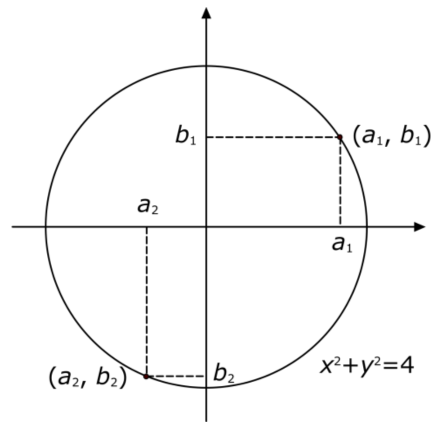
Dérivation implicite

Fonctions implicites

Soit *C* une courbe du plan dont l'équation est une relation entre *x* et *y* et soit (*a*, *b*) un point situé sur cette courbe. Le théorème des fonctions implicites affirme que, si certaines hypothèses sont satisfaites, il existe une fonction *f*(x) définie au voisinage de x = a dont le graphe *y*=*f*(*x*) coïncide avec une portion de la courbe qui contient le point (*a*, *b*) (et donc *f*(*a*) = *b*).



Exemple : Prenons le cercle $x^2+y^2 = 4$. Les hypothèses du théorème sont satisfaites pour tous les points (*a*, *b*) du cercle avec $b \neq 0$, c.-à-d. pour tous les points autres que (±2, 0). Si $b > 0$, la fonction du théorème est $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; si $b < 0$, elle est $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$.

Dérivation implicite

Supposons qu'on veuille calculer la pente de la tangente à notre cercle en un point (*a*, *b*) ($b \neq 0$).

Si $b > 0$, il faut dériver $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, et la réponse est $f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{4-a^2}} = -\frac{a}{b}$; si b < 0, on dérive $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$ et la réponse est $f'(a) = \frac{a}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{-a}{-\sqrt{4-a^2}} = -\frac{a}{b}$.

Remarquons que ces résultats identiques peuvent être obtenus directement à partir de l'équation du cercle : dans les deux cas, on aura $x^2+y^2 = 4$ avec $y = f(x)$, donc

$$x^2 + [f(x)]^2 = 4 .$$

Si on dérive par rapport à x, les dérivées des deux membres doivent être égales, ce qui donne

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0 .$$

En remplaçant *x* par *a* et *f*(*x*) par *b*, on obtient $2a + 2bf'(a) = 0$, c.-à-d. $f'(a) = -a/b$.

Cette manière de procéder est ce qu'on appelle la dérivation implicite. C'est une technique très utile dans les cas où, contrairement à notre exemple, on ne peut pas exprimer explicitement *y* comme une fonction de *x*.

En pratique, pour avoir une notation plus compacte, on utiliserait *y* et *y'* au lieu de *f*(*x*) et *f'*(*x*) : on aurait donc

$$2x+2yy' = 0$$

et

$$y' = -x/y.$$

Exemples

<u>Exemple 1</u> : La courbe $x^3 + y^3 = 6xy$ est ce qu'on appelle un *folium de Descartes*. Elle passe par le point (3, 3). Trouver l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

<u>Solution</u> : La dérivation implicite donne $3x^2 + 3y^2 y' = 6(y + xy') \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 2y}{2x - y^2}$, d'où $y' = -1$ pour $x = y = 3$. L'équation de la tangente est donc

$$y = 3 - (x - 3) = -x + 6\,.$$

N.B. : On aurait pu conclure que $y' = -1$ en raison de la symétrie du problème.

<u>Exemple 2</u> : La courbe $x^4 + y^4 = 17$ est un exemple de *courbe de Lamé*. Calculer la valeur de y' pour x = 2 a) implicitement; b) explicitement.

<u>Solution</u> : a) La dérivation implicite donne $4x^3 + 4y^3 y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x^3}{y^3}$. Pour $x = 2$, on a les possibilités $y = 1 \Rightarrow y' = -8$ et $y = -1 \Rightarrow y' = 8$.

b) On a $y = \pm\left(17 - x^4\right)^{1/4} \Rightarrow y' = \pm\dfrac{1}{4}\left(17 - x^4\right)^{-3/4}(-4x^3) = \mp 8$ pour x = 2.