Les limites

Limites

On dit qu'une propriété est vraie au voisinage de $x = a$ si elle est vraie sur un intervalle ouvert I qui contient a.

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage du point $x = a$, sauf peut-être au point $x = a$ lui-même. On dit que $f(x)$ tend vers L si x tend vers a ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si on peut rendre $f(x)$ <u>arbitrairement</u> proche de L à condition de prendre x <u>suffisamment</u> proche de a (mais avec $x \neq a$). On utilise aussi la notation $f(x) \to L$ si $x \to a$.

La proposition suivante est évidente. Elle est souvent utilisée.

Proposition : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage du point $x = a$, sauf peut-être au point $x = a$ lui-même, avec la propriété que $f(x) = g(x)$ pour $x \neq a$. Si g a une limite quand x tend vers a, alors f en a une aussi et on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

<u>Exemple</u> : On cherche $\lim_{x \to 2} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$. Puisque $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$,

pour $x \neq 2$, on aura $f(x) = g(x)$ où $g(x) = x - 1$. Donc $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = 1$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage du point $x = a$, sauf peut-être au point $x = a$ lui-même, avec $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = M$ et soit c une constante. On a les propriétés suivantes :

Propriétés des limites	
1) $\lim_{x \to a} c = c$.	2) $\lim_{x \to a} x = a$.
3) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.	4) $\lim_{x \to a} [cf(x)] = cL$.
5) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = LM$.	6) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ si $M \neq 0$.
7) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$ (n entier > 0).	8) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ($L > 0$ si n pair).
9) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a (sauf peut-être en $x = a$), *alors* $L \leq M$.	

La proposition suivante est une conséquence directe de ces propriétés.

Proposition : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes. On a

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

et

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

si $Q(a) \neq 0$

Exemple : Si $P(x) = x^2 + 2x + 3$ et $Q(x) = 3x^2 - 5x + 7$, alors $\lim_{x\to 2} P(x) = 2^2 + 2\cdot 2 + 3 = 11$, et $\lim_{x\to 2} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2^2 + 2\cdot 2 + 3}{3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 7} = \frac{11}{9}$.

Le « théorème du sandwich »

Le résultat suivant est connu sous le nom de « théorème du sandwich » :

Proposition : Supposons qu'au voisinage du point *x* = *a* (sauf peut-être au point *x* = *a* lui même) on ait $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. Dans ce cas $g(x)$ a une limite quand *x* tend vers *a* et on a

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Le théorème exprime que si une fonction est coincée entre deux autres qui tendent vers une limite commune, la fonction du milieu n'a pas d'autre choix que de tendre vers la même limite. Un exemple d'application de ce théorème est donné dans la section suivante.

Limites unilatérales

Nous dirons qu'une propriété est vraie à droite de *x* = *a* si elle est vraie sur un intervalle]*a*, *b*[et qu'elle est vraie à gauche de *a* si elle est vraie sur un intervalle]*b*, *a*[.

Définition : Soit *f* une fonction définie à droite du point *x* = *a*. On dit que la limite à droite de *f*(*x*) est *L*, ce que l'on note

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si on peut rendre *f*(*x*) arbitrairement proche de *L* à condition de prendre *x* suffisamment proche de a, mais avec x > *a*. On utilise aussi la notation $f(x) \to L$ si $x \to a^+$.

Définition : Soit *f* une fonction définie à gauche du point *x* = *a*. On dit que la limite à gauche de *f*(*x*) est *L*, ce que l'on note

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

si on peut rendre *f*(*x*) arbitrairement proche de *L* à condition de prendre *x* suffisamment proche de a, mais avec x < *a*. On utilise aussi la notation $f(x) \to L$ si $x \to a^-$.

On a la proposition suivante qui relie les notions de limite et de limites unilatérales :

Proposition : Soit f une fonction définie au voisinage du point $x = a$, sauf peut-être au point $x = a$ lui-même. La limite de $f(x)$ quand x tend vers a existe et vaut L :

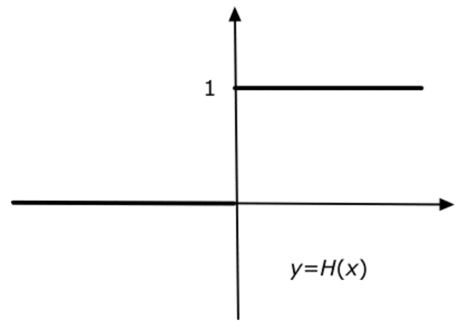
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont toutes les deux égales à L :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Exemple : En génie électrique, on utilise souvent la *fonction échelon de Heaviside* définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$



Clairement, cette fonction n'a pas de limite quand $x \to 0$ puisque $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$.