Limites infinies, limites à l'infini

Limites à l'infini

On dit qu'une propriété est vraie au voisinage de l'infini si elle est vraie sur un intervalle ouvert $]a, \infty[$.

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini. On dit que $f(x)$ tend vers L si x tend vers l'infini ou que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si on peut rendre $f(x)$ <u>arbitrairement</u> proche de L à condition de prendre x <u>suffisamment</u> grand. On utilise aussi la notation $f(x) \to L$ si $x \to \infty$

On définit de manière similaire $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ (ou $f(x) \to L$ si $x \to -\infty$). La différence est qu'on prend x grand en valeur absolue, mais négatif, pour des fonctions définies sur un intervalle de la forme $]-\infty, b[$.

La proposition suivante est évidente. Elle est souvent utilisée.

Proposition : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de l'infini, avec la propriété que $f(x) = g(x)$ pour $x > a$. Si g a une limite quand x tend vers l'infini, alors f en a une aussi et on a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

Une proposition analogue est valide pour x tendant vers moins l'infini.

<u>Exemple</u> : On cherche $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. Pour x positif, $x-4 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ et pour $x \neq 4$, on a $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = g(x)$ où $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$. Donc $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de l'infini avec $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$ et soit c une constante. On a les propriétés suivantes :

Propriétés des limites à l'infini	
1) $\lim_{x\to a} c = c$.	2) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.
3) $\lim_{x\to\infty} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.	4) $\lim_{x\to\infty} [cf(x)] = cL$.
5) $\lim_{x\to\infty} [f(x)g(x)] = LM$.	6) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$.
7) $\lim_{x\to\infty} [f(x)]^n = L^n$ (n entier > 0).	8) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ($L > 0$ si n pair).

9) Si $f(x) \le g(x)$ sur un intervalle $]a, \infty[$*, alors* $L \le M$.

On a des propriétés équivalentes pour les limites à moins l'infini. Comme conséquence de ces propriétés, on a en particulier que pour tout entier n > 0,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 .$$

Exemple 1 : Soient $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et $Q(x) = 5x^2 - 6x + 7$. Alors, en divisant en haut et en bas par x^2, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{5 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{2-0+0}{5-0+0} = \frac{2}{5} .$$

Dans cet exemple, $2x^2$ et $5x^2$ sont appelés les termes dominants de $P(x)$ et $Q(x)$, respectivement. La limite est donc le rapport des coefficients des termes dominants. Il est facile de voir que la situation se généralise à tout quotient de polynômes de même degré.

Exemple 2 : Soient $P(x) = 2x - 3$ et $Q(x) = 4x^2 - 5x + 6$. En divisant de nouveau en haut et en bas par x^2, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{4 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{0-0}{4-0+0} = 0 .$$

Il est facile de voir que la situation se généralise à tout quotient de polynômes où le degré du dénominateur est plus grand que le degré du numérateur : la limite est toujours zéro.

Limites infinies

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage du point $x = a$, sauf peut-être au point $x = a$ lui-même. On dit que $f(x)$ tend vers l'infini si x tend vers a ou que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

si on peut rendre $f(x)$ arbitrairement grand à condition de prendre x suffisamment proche de a (mais avec $x \neq a$). On utilise aussi la notation $f(x) \to \infty$ si $x \to a$.

On définit de manière similaire $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (ou $f(x) \to -\infty$ si $x \to a$). La différence est qu'on rend $f(x)$ grand en valeur absolue, mais négatif.

La proposition suivante est évidente. Elle est souvent utilisée.

Proposition : Soient *f* et *g* deux fonctions définies au voisinage du point *x* = *a*, sauf peut-être au point *x* = *a* lui-même, avec la propriété que $f(x) = g(x)$ pour $x \neq a$. Si *g* tend vers l'infini (ou moins l'infini) quand *x* tend vers *a*, alors *f* aussi

On peut définir de manière similaire les limites infinies à gauche et à droite.

Exemples : $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Asymptotes

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, on dit que la fonction *f* a une asymptote horizontale *y* = *L*.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, on dit que la fonction *f* a une asymptote verticale en *x* = *a*.

Une fonction peut avoir une infinité d'asymptotes verticales (par exemple *f*(*x*) = tg *x*) , mais au plus deux asymptotes horizontales.

Limites infinies à l'infini

Définition : Soit *f* une fonction définie au voisinage de l'infini. On dit que *f*(*x*) tend vers l'infini si *x* tend vers l'infini ou que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

si on peut rendre *f*(*x*) arbitrairement grand à condition de prendre *x* suffisamment grand. On utilise aussi la notation *f*(*x*) → ∞ si *x* → ∞

On définit de manière similaire $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ (ou *f*(*x*) → -∞ si *x* → ∞), $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ (ou *f*(*x*) → ∞ si *x* → -∞) et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (ou *f*(*x*) → -∞ si *x* → -∞).

Exemples : Si *n* est un entier positif, $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$ si *n* est pair et $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si *n* est impair.

On peut voir que si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et que le degré de $P(x)$ est plus grand que le degré de $Q(x)$, alors

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty, -\infty, \pm\infty \text{ ou } \mp\infty .$$

Cela dépend des signes des coefficients des termes dominants et de la parité des degrés des polynômes.