Les polynômes

Monômes et polynômes

Un <u>monôme</u> de <u>degré</u> k est une expression de la forme ax^k où a est une constante réelle, appelée coefficient, et k est un entier ≥ 0. (Rappel : $x^0 = 1$) Un <u>polynôme</u> est une somme de monômes et son <u>degré</u> est le plus grand degré des monômes qui apparaissent dans l'expression : par exemple, $P(x) = 2X^3 + 5x - 7$ est un polynôme de degré 3. Deux cas particuliers importants de polynômes sont les <u>binômes</u> du premier degré

$$\boxed{ax + b \quad (a \neq 0)}$$

et les <u>trinômes</u> du deuxième degré

$$\boxed{ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).}$$

Opérations sur les polynômes

La somme et la différence de deux monômes de même degré sont définies par

$$\boxed{ax^k \pm bx^k = (a \pm b)x^k}$$

et le produit de deux monômes quelconques par

$$\boxed{ax^p \cdot bx^q = abx^{p+q}.}$$

La somme de deux polynômes est le polynôme obtenu en additionnant les monômes de même degré dans chacun des polynômes :

$$(5x^3 + 6x^2 + 4) + (2x^3 + 3x + 7) = 7x^3 + 6x^2 + 3x + 10$$

(même chose pour la différence). Pour multiplier deux polynômes, il faut multiplier tous les monômes de l'un par tous les monômes de l'autre. On regroupe ensuite les monômes de même degré. Par exemple

$$\begin{aligned}(2x^2 + 3x + 4)(5x^2 + 6x + 7) &= 10x^4 + 12x^3 + 14x^2 \\ &\quad + 15x^3 + 18x^2 + 21x \\ &\quad + 20x^2 + 24x + 28 \\ &= 10x^4 + 27x^5 + 52x^2 + 45x + 28\end{aligned}$$

Racines et factorisation

Factoriser un polynôme $P(x)$ consiste à l'écrire comme un produit de polynômes de degrés plus petits : $P(x) = Q(x)R(x)$. Reportez-vous au livre de référence pour les différentes techniques de factorisation.

On dit que le nombre réel c est une racine du polynôme $P(x)$ si $P(c) = 0$.

Le lien entre les deux concepts est fourni par le résultat suivant :

Proposition. Soit c une racine du polynôme $P(x)$ de degré n. Alors il existe un polynôme $Q(x)$ de degré n-1 tel que $P(x) = (x-c)Q(x)$.

Exemple : Si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, on remarque que $P(1) = 0$. On peut vérifier que $P(x)$ se factorise en $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x)$.

Identités remarquables

Il existe un certain nombre d'identités qui aident à factoriser des polynômes. Celles qui reviennent le plus souvent sont

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

et

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

qui sont à retenir (il y en a d'autres dans le livre de référence). Par exemple, $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ et $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 + 2x + 1) = x^2(x+1)^2$.

Racines des trinômes

Le discriminant du trinôme du deuxième degré $ax^2 + bx + c$ est la quantité

$$\Delta = b^2 - 4ac\,.$$

Trois cas peuvent se présenter selon la valeur de ce discriminant :

$\Delta < 0$	$ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines et est toujours du même signe que a. On dit que le trinôme est irréductible.
$\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
$\Delta > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Tableaux de signes

Tout polynôme peut écrire un comme un produit de binômes du premier degré et de trinômes irréductibles du deuxième degré. Si on connait ce produit, il est possible de trouver quel est le signe du polynôme en fonction de x en utilisant un tableau de signes. La technique est basée sur le fait que si on connait le signe de tous les facteurs d'un produit, on connait le signe du produit.

Exemple 1 : Étudier le signe de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Solution : On vérifie que $P(x) = x(x-1)(x-2)$. Ceci donne le tableau :

x		0		1		2	
x	-	0	+	+	+	+	+
x-1	-	-	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	-	-	0	+
$x(x$-1$)(x$-2$)$	-	0	+	0	-	0	+

Exemple 2 : Résoudre $x^3 - x < 4x^2 - 4$.

Solution : L'inéquation se ramène $x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0$, c'est-à-dire $(x+1)(x-1)(x-4)<0$. D'après le tableau suivant :

x		-1		1		4	
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x-1	-	-	-	0	+	+	+
x-4	-	-	-	-	-	0	+
$(x+1)(x-1)(x-4)$	-	0	+	0	-	0	+

la solution est $x < -1$ ou $1 < x < 4$.

Exemple 3 : Résoudre $x^3+x \geq 3x^2+3$.

Solution : L'inéquation se ramène $x^3-3x^2+x-3 \geq 0$, c'est-à-dire $(x^2+1)(x-3) \geq 0$, où x^2+1 est irréductible. On a donc le tableau suivant

x		3	
x^2+1	+	+	+
x-3	-	0	+
$(x^2+1)(x-3)$	-	0	+

qui montre que l'ensemble solution est [3, ∞[.