Dérivée d'un produit et d'un quotient

Dérivées d'un produit et d'un quotient

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables. La formule pour la dérivée de leur produit est

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

et la formule pour la dérivée de leur quotient est

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

si $g(x) \neq 0$. Au numérateur, faites attention de dériver d'abord $f(x)$, sinon votre réponse aura le mauvais signe.

Exemples

Exemple 1. Dériver $(x^2+1)(2x^5+3x)$

Solution. $\frac{d}{dx}(x^2+1)(2x^5+3x) = (x^2+1)'(2x^5+3x) + (x^2+1)(2x^5+3x)' =$
$2x(2x^5+3x) + (x^2+1)(10x^4+3) = 14X^6 + 10x^4 + 9x^2 + 3$.

Exemple 2. Dériver $\frac{x^2+4}{3x^2-1}$

Solution. $\frac{d}{dx}\frac{x^2+4}{3x^2-1} = \frac{(x^2+4)'(3x^2-1)-(x^2+4)(3x^2-1)'}{[3x^2-1]^2} = \frac{2x(3x^2-1)-(x^2+4)6x}{[3x^2-1]^2} =$
$\frac{-26x}{[3x^2-1]^2}$

Preuve de la formule pour le produit

On a

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)$$

(rien ne change car on soustrait et additionne la même quantité $f(x)g(x+h)$). Donc

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Si on prend la limite pour $h \to 0$, on a $g(x+h) \to g(x)$, car une fonction dérivable en un point y est forcément continue. Donc si f et g sont dérivables,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dérivée de $\frac{1}{g(x)}$

Soit $g(x)$ une fonction dérivable. Si $g(x) \neq 0$, on a[1]

$$\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

et donc

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)},$$

d'où

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -g'(x) \frac{1}{g(x)g(x)} = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Preuve de la formule pour le quotient

Si maintenant $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables avec $g(x) \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$$

et donc, par la formule du produit,

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

---

[1] Si g est dérivable en x, g est continue en x. Donc si $g(x) \neq 0$, on a automatiquement que pour h suffisamment petit, $g(x+h) \neq 0$