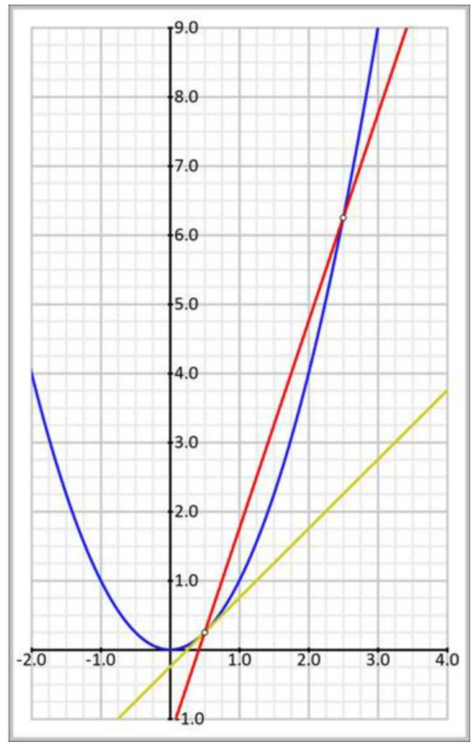
Sécantes et tangentes (2)



Exemple 1 : Supposons qu'on veuille calculer la pente de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^2$ pour $x = x_1$. Si on prend la sécante qui passe par les points du graphe (x_1, x_1^2) et (x_2, x_2^2), on a

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

et

$$\Delta y = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Donc la pente de la sécante sera

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 .$$

Si on rapproche maintenant le point 2 du point 1, on voit que $m_{\text{séc}}$ se rapproche de $x_1 + x_1 = 2x_1$. La pente de la tangente doit donc être $m_{\text{tg}} = 2x_1$.

Dans la figure ci-contre, on a $x_1 = 0.5$ et $x_2 = 2.5$. On constate que la pente de la sécante, en rouge, est bien $m_{\text{séc}} = 0.5+2.5 = 3$ et que celle de la tangente, en jaune, est $m_{\text{tg}} = 2\times 0.5 = 1$.

Exemple 2 : Supposons maintenant qu'on veuille calculer la pente de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^3$ pour $x = x_1$. Si on prend la sécante qui passe par les points du graphe (x_1, x_1^3) et (x_2, x_2^3), on aura toujours $\Delta x = x_2 - x_1$, mais cette fois-ci

$$\Delta y = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2).$$

Donc la pente de la sécante sera

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 .$$

On voit que quand le point 2 se rapproche du point 1, $m_{\text{séc}}$ se rapproche de $x_1^2 + x_1^2 + x_1^2$, c'est-à-dire de $3x_1^2$. La pente de la tangente doit donc être $m_{tg} = 3x_1^2$.

Cas général : On peut montrer que si la fonction est $f(x) = x^n$, alors la pente de la tangente au graphe au point (x_1, x_1^n) est $m_{tg} = n x_1^{n-1}$. Pouvez-vous le montrer pour $n = 4$?