La sorcière d’Agnesi

Agnési est une mathématicienne italienne du 18^e siècle qui a écrit un important manuel d’analyse en 1748, *Les institutions analytiques*. Agnesi avait nommé *la tournante* une des courbes qu’elle étudie dans son manuel. En italien, c’était *la versiera*. John Colson, le traducteur anglais qui avait appris l’italien dans le seul but de traduire ce manuel a confondu *la versiera* avec *l’avversiera* qui signifie femme du diable, ou sorcière. Depuis ce temps on fait référence à cette courbe comme à la *sorcière d’Agnesi*.

Maria Gaetana Agnesi, enfant prodige

Maria Gaetana Agnesi était une enfant prodige.
À 5 ans, outre l’italien, elle parle français, appris de sa nourrice.
À 9 ans elle publie un texte sur le droit des femmes à l’éducation.
À 13 ans elle parle en plus le grec ancien, l’hébreu, l’espagnol et l’allemand.
Son père est professeur d’université et reçoit dans son salon des experts de différentes disciplines pour discuter de sujets divers, elle assiste aux discussions dès son enfance et adolescente elle a tellement appris qu’elle y participe activement.
À 14 ans, elle est l’attraction du salon de son père, elle discute de sujets philosophiques et scientifiques des plus complexes avec les experts de ces domaines.

Les institutions analytiques

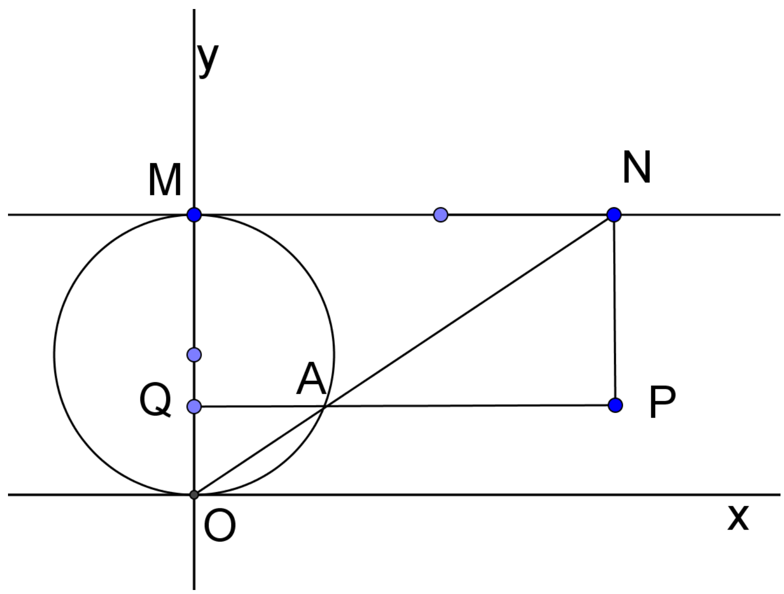
En 1748, Agnesi publie *Les institutions analytiques*, un manuel d’analyse qui reçut un accueil très positif non seulement dans son pays, mais en France, en Angleterre et en Allemagne également. En Italie, le pape lui donna une chaire de mathématiques à l’Université de Bologne où travaillait son père. Peu après, à la mort de son père, Agnesi quitte l’université et consacre sa vie à l’aide aux démunis.

Les institutions analytiques comportent quatre chapitres :

- 1. *L’analyse des quantités finies* (l’algèbre élémentaire)
- 2. *Le calcul différentiel*
- *3. Le calcul intégral*
- *4. La méthode inverse des tangentes (les équations différentielles)*

Un peu de mathématiques

Agnesi utilise beaucoup la géométrie dans son manuel et elle propose de nombreux exemples pour illustrer la matière. La sorcière d'Agnesi est justement un exemple de courbe défini géométriquement dont on doit d'abord trouver l'équation avant d'en faire l'analyse. Ce serait une approche très déconcertante pour des étudiants modernes, mais cela donne beaucoup d'information sur les courbes qu'on étudie en fournissant à la fois de l'information géométrique et analytique.



Soit $a > 0$. Un cercle est tracé de diamètre OM où O est l'origine du système de coordonnées et M est le point de coordonnées (0, a). A est un point sur le cercle et O, A et N sont en ligne droite, N étant sur la tangente au cercle passant par M. Q est sur le diamètre OM, P est sur la perpendiculaire à MN passant par N et QAP sont en ligne droite, la ligne étant parallèle à la tangente MN (et donc à l'axe des x).

La sorcière d'Agnesi est le lieu géométrique des points P lorsque A parcourt le cercle.

Si les coordonnées de P sont (x, y), on cherche à exprimer y en fonction de x.

Pour ce faire, on utiliser deux propriétés géométriques de cette figure :

1. Le point A est sur le cercle et satisfait donc à son équation
2. Les triangles OQA et OMN sont semblables.

Les coordonnées des différents points sur la figure sont :

O : (0, 0)   donnée initiale
M : (0, a)   donnée initiale
P : (x, y)   par définition
A : (u, y)   même ordonnée que P, abcisse u inconnue.
N : (x, a)   même ordonnée que M, même abscisse que P
Q : (0, y)   même ordonnée que A, abscisse = 0

D'abord, trouvons l'équation du cercle.

Il s'agit du cercle centré en $(0, \frac{a}{2})$ de rayon $\frac{a}{2}$. Son équation est

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - ay = 0$$

Puisque A : (u, y) est sur le cercle, on a : $u^2 + y^2 - ay = 0$

Maintenant, puisque les triangles OQA et OMN sont semblables (angle O commun et angles Q et M droits), on a que $\frac{QA}{QO} = \frac{MN}{MO} \Leftrightarrow \frac{u}{y} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow u = \frac{xy}{a}$

Puisque $u^2 + y^2 - ay = 0$, en substituant u par sa valeur $u = \frac{xy}{a}$ dans l'équation, on obtient : $\frac{x^2y^2}{a^2} + y^2 - ay = 0 \Leftrightarrow y^2\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right) = ay$

Et donc $\left(\frac{x^2 + a^2}{a^2}\right) = \frac{a}{y} \Leftrightarrow y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$

Maintenant il est facile d'analyser la courbe dont on connait l'équation

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2a^3x}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3\left(3x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$$

- **Analyse avec la première dérivée :**

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^3x}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$, donc la fonction a un maximum à x = 0 (dérivée nulle et changeant de signe), elle est croissante pour x < 0 (dérivée positive) et décroissante pour x > 0 (dérivée négative).

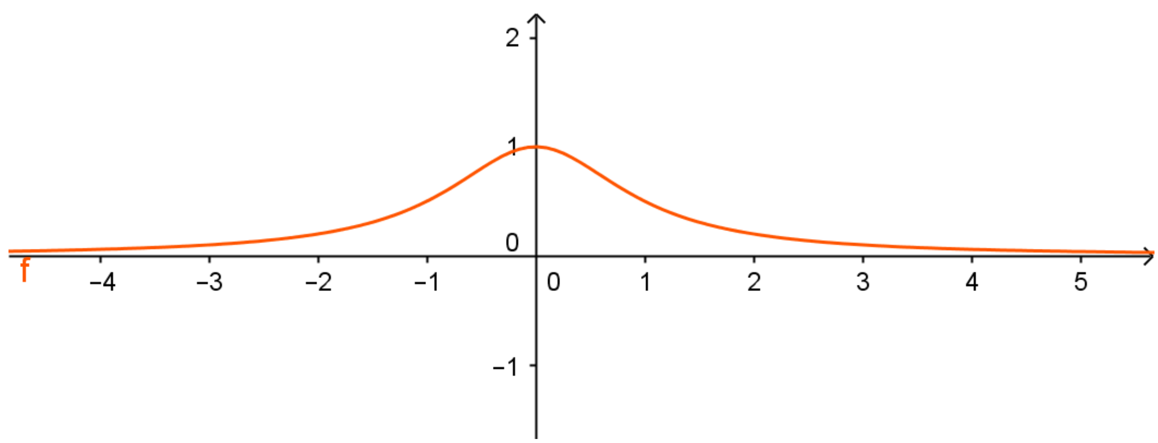
• **Analyse avec la seconde dérivée :**

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3\left(3x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$, donc la fonction a deux points d'inflexion à $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ (car la dérivée seconde est nulle et change de signe en ces points), elle est concave vers le bas pour $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ (car la dérivée seconde est négative sur cet intervalle) et elle est concave vers le haut pour $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ (car la dérivée seconde est positive sur ces intervalles).

• Asymptotes :

$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ nous dit que l'axe des x est une asymptote horizontale lorsque x tend vers $\pm\infty$

Si a = 1, on retrouve la courbe bien connue des étudiants de calcul différentiel : $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ illustrée ci-dessous (la forme de la courbe ne change pas avec un a différent):



Paul Deguire, 12 juillet 2017