Les carrés magiques

Un ***carré magique*** est un tableau carré, de n colonnes et n rangées, contenant n^2 cases (ou emplacements) dans lesquelles on inscrit des nombres distincts généralement entiers. Si la somme des nombres dans chacune des n rangées, des n colonnes et des deux diagonales principales est constante, le carré est dit magique.

Voici un exemple de carré magique 4 x 4 :

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Chaque carré 1 x 1 contenant un seul nombre satisfait trivialement à la définition de carré magique. Les carrés magiques 1 x 1 sont donc sans intérêt. On peut voir facilement qu'il n'y a pas de carré magique 2 x 2.

Les choses intéressantes ne commencent donc à se produire qu'à partir de n = 3.

Quelques définitions et exemples

• Un carré magique $n \times n$ sera dit ***normal*** lorsque les nombres qui le composent sont les n^2 premiers entiers positifs : 1, 2, 3, …, n^2. Le carré de l'exemple plus haut est normal, c'est un carré magique 4 x 4 contenant les entiers 1 à 16.

• La somme des nombres dans chaque rangée, colonne ou diagonale d'un carré magique s'appelle sa ***densité***. Il est facile de calculer la densité d'un carré normal $n \times n$:

La densité d'un carré normal $n \times n$ est égale à $\frac{1}{n} \times \left(\frac{n^4 + n^2}{2} \right)$,

ce qui donne par exemple 15 pour $n = 3$, 34 pour $n = 4$ et 65 pour $n = 5$.

Ce résultat découle directement de la formule connue pour la somme des n^2 premiers entiers positifs.

• Un carré magique, outre ses deux diagonales principales, contient 2 n – 2 diagonales brisées, certaines montantes et d'autres descendantes.

Les diagonales montantes 1-1-1-1-, 2-2-2-2, 3-3-3-3 et 4-4-4-4 sont illustrées sur le carré suivant, celle avec des 4 est une diagonale principale, les autres sont des diagonales brisées :

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Les diagonales descendantes 1-1-1-1, 2-2-2-2, 3-3-3-3 et 4-4-4-4 sont illustrées sur le carré suivant, celle avec des 1 est une diagonale principale, les autres sont des diagonales brisées :

1	4	3	2
2	1	4	3
3	2	1	4
4	3	2	1

Dans un carré magique, il suffit que la somme des *n* nombres dans les deux diagonales principales soit égale à la densité du carré. En général, et c'est le cas du carré illustré plus haut, la somme des nombres dans les diagonales brisées n'est pas toujours (et parfois jamais) égale à la densité du carré.

Un carré magique est dit ***diabolique*** lorsque la somme des *n* nombres de chaque diagonale brisée est égale à la densité du carré. Ces carrés ont des propriétés très particulières, on dit parfois qu'ils sont super magiques.

Le carré suivant est diabolique :

6	12	13	3
15	1	8	10
4	14	11	5
9	7	2	16

L'unicité du carré 3 x 3

Le carré 3 x 3 suivant indique le nombre de sommes (lignes, colonnes ou diagonales) dans lequel chaque élément du carré apparaît :

3	1	3
1	4	1
3	1	3

Par exemple, l'élément au centre du carré appartient aux deux diagonales, à une ligne et à une colonne. Il intervient donc dans quatre sommes distinctes.

En tout il y a 8 sommes à considérer (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales).

Dans le carré 3 x 3, la densité est 15. Chaque somme (ligne, colonne ou diagonale) contient trois termes, nous cherchons donc quelles sont les sommes de trois nombres parmi les 9 premiers entiers dont la somme est égale à 15. Les voici :

$$1+5+9$$
$$1+6+8$$
$$2+4+9$$
$$2+5+8$$
$$2+6+7$$
$$3+4+8$$
$$3+5+7$$
$$4+5+6$$

Il y en a 8 et comme on a vu, on en a justement besoin de 8.

Par ailleurs, on observe que le 5 apparaît 4 fois dans ces sommes, il doit être placé au centre du carré. Les autres nombres impairs n'apparaissent que dans 2 de ces sommes, ils doivent être dans les milieux des côtés du carré. Donc les nombres pairs, qui apparaissent chacun dans trois sommes, doivent être dans les coins. Avec ces informations, on peut facilement fabriquer un carré 3 x 3.

Tel qu'illustré dans les carrés ici-bas, on place d'abord le 5 au centre (premier carré). Puis on place le 2 dans un coin, ce qui fixe le 8 dans le coin opposé en diagonale car la somme sur la diagonale doit être 15 (second carré). Ensuite on place le 4 dans un coin restant. Ce qui place le 6 dans le dernier coin (troisième carré). Ensuite on complète en sachant que les sommes dans les lignes et les colonnes donnent toujours 15 (dernier carré, le carré magique est complété).

$$\begin{array}{|ccc|}\hline & & \\ & 5 & \\ & & \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & & \\ & 5 & \\ & & 8 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & & 4 \\ & 5 & \\ 6 & & 8 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ \hline\end{array}$$

On observe que pour placer le deux nous avions 4 choix (n'importe quel coin) et que pour chacun de ces choix, il y a deux manières de placer le 4 (deux coins restants). On peut donc former 8 carrés distincts 3 x 3. Mais tous ces carrés peuvent être obtenus les uns des autres soit par une rotation ou par une image miroir. Il s'agit donc de 8 façons de regarder un seul et même carré. Le carré magique 3 x 3 est unique à symétrie près.

Les carrés emboités

Nous allons maintenant voir comment emboiter un carré dans un autre. Pour simplifier les choses nous demanderons que le grand carré final soit normal, ce qui nous obligera à modifier le carré central. Nous commençons avec un carré 3 x 3 normal, que l'on sait construire.

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ \hline\end{array}$$

Sa densité est 15 et la moyenne des valeurs pour chaque case est 5.

L'objectif est de créer un carré plus grand comme ceci :

?	?	?	?	?
?	2	9	4	?
?	7	5	3	?
?	6	1	8	?
?	?	?	?	?

Le carré final aura une densité de 65 (carré 5 x 5) et la moyenne de chaque case sera donc égale à 13.

Puisque la moyenne de chaque case du carré initial est égale à 5, nous allons ajouter 8 à chaque nombre pour arriver à une moyenne égale à 13. On obtient ceci (c'est la seule transformation que nous faisons au carré central, elle n'est pas obligatoire mais si on ne la fait pas le carré final ne sera pas normal et contiendra des entiers négatifs):

?	?	?	?	?
?	10	17	12	?
?	15	13	11	?
?	14	9	16	?
?	?	?	?	?

En utilisant le fait que la somme des éléments de chaque ligne, colonne et diagonale du carré est égale à 65 et que nous avons déjà 39 pour les sommes des lignes, colonnes et diagonales du carré central on voit que la somme des termes manquants dans le carré suivant, sur chaque ligne (par exemple a et a), sur chaque colonne (par exemple b et b) et sur chaque diagonale (par exemple c et c) doit être égale à 26 (39 + 26 = 65).

c	?	?	*b*	?
?	10	17	12	?
a	15	13	11	*a*
?	14	9	16	?
?	?	?	*b*	*c*

Le reste est une question d'essais répétés en éliminant les cas qui ne fonctionnent pas.

On sait que les nombres manquants pour obtenir un carré magique normal sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.

Par exemple, si on suppose (choix initial) que le 1 et le 3 sont dans les coins, on aura une situation comme la suivante

1	?	?	?	3
?	10	17	12	?
?	15	13	11	?
?	14	9	16	?
23	?	?	?	25

Le 23 et le 25 sont automatiques car 1 + 25 = 26 et 3 + 23 = 26.

Dans la ligne du haut, nous avons 1 et 3, il manque 61 pour faire un total de 65.
Dans la ligne du bas nous avons 23 et 25, il manque 17 pour faire un total de 65.
Dans la colonne de gauche nous avons 1 et 23, il manque 41 pour obtenir 65.
Dans la colonne de droite nous avons 3 et 25, il manque 37 pour obtenir 65.

Regardons maintenant les autres sommes de deux nombres manquants dont la somme est 26 :

2	4	5	6	7	8
24	22	21	20	19	18

Nous essaierons de compléter une ligne et une colonne avec un nombre de chacune des paires donnant une somme de 26. Ceci nous assure qu'en trouvant les nombres qu'il faut pour une ligne nous trouvions automatiquement l'autre ligne et de même pour les colonnes. Cela découle du fait que la somme de trois colonnes donne 26 x 3 = 78 alors que la somme des termes manquant des deux lignes est 17 + 61 = 78 et que la somme des termes manquants dans les colonnes est 37 + 41 = 78.

Allons-y par essai erreur : si on cherche une somme égale à 17 (ligne du bas), on peut par exemple prendre 2 + 7 + 8 = 17 (bloquant les autres termes de ces colonnes, 24 + 19 + 18 = 61 pour la ligne du haut).
Il reste alors 4, 5, 6, 20, 21 et 22 parmi lesquels choisir pour obtenir les sommes de 37 et 41 nécessaires pour les colonnes. On voit rapidement qu'aucune combinaison de trois de ces chiffres dans trois colonnes distinctes ne donne 37 ou 41. Le choix 2 + 7 + 8 = 17 est à rejeter.

Essayons maintenant avec 4 + 6 + 7 = 17 (bloquant 22 + 20 + 19 = 61 pour la ligne du haut).
Il reste alors 2, 5, 8, 18, 21, 24 parmi lesquels on doit choisir pour obtenir les sommes de 37 ou 41 nécessaires pour compléter les colonnes. On voit rapidement que 5 + 8 + 24 = 37 et ainsi 21 + 18 + 2 = 41 fournissent une solution.

Pour compléter le carré il suffit de placer dans l'ordre qu'on veut 4, 6 et 7 dans la ligne du bas, avec 19, 20 et 22 dans les bonnes cases de la ligne du haut pour que la somme dans les colonnes donne toujours 65 (19 vis-à-vis du 7, 20 vis-à-vis du 6 et 22 vis-à-vis du 4) et de placer dans l'ordre qu'on veut 5 + 8 + 24 dans la colonne de gauche et de placer dans les cases correspondantes de la colonne de droite 21, 18 et 2.

Un exemple de solution serait :

1	20	22	19	3
21	10	17	12	5
2	15	13	11	24
18	14	9	16	8
23	6	4	7	25

Si aucune réponse satisfaisante n'est obtenue avec le choix initial de deux termes pour les coins, il suffit de modifier le choix jusqu'à ce qu'une réponse satisfaisante soit obtenue. On peut toujours emboiter des carrés. En fait, il y a toujours un très grand nombre de solutions possibles.

En terminant, on pourrait utiliser une méthode semblable pour emboîter ce carré *5 x 5* dans un carré *7 x 7*, en prenant soin d'ajuster sa densité pour que la moyenne des termes soit celle d'un carré *7 x 7* normal. Ainsi, notre méthode procurera un carré *7 x 7* normal avec une copie légèrement modifiée du carré *5 x 5* en son centre. La modification est toujours, dans cette méthode, l'ajout de la même constante à chaque terme du carré central pour ajuster la moyenne à celle d'un carré *7 x 7*.

Paul Deguire, août 2017