Les racines des équations cubiques

Le cas des équations quadratiques

Si on considère l'équation quadratique

$$Ax^x + Bx + C = 0$$

Une division par A (A est non nul si l'équation est quadratique) nous donne une équation du type :

$$x^2 + bx + c = 0\,.$$

Le changement de variable $x = z - \frac{b}{2}$ nous amène à l'équation suivante :

$$z^2 - \frac{2bz}{2} + \frac{b^2}{4} + bz - \frac{b^2}{2} + c = 0$$

qui se simplifie et se résout facilement :

d'abord, on a $z^2 = \frac{b^2}{4} - c$ et donc $z = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ et finalement $x = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Le cas de l'équation cubique

Pour résoudre l'équation cubique $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, on va suivre une démarche initiale semblable à ce qu'on a fait pour l'équation quadratique.

Premièrement, A étant non nul (sinon l'équation ne serait pas cubique), on peut diviser par A. On obtient alors une équation du type :

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Ensuite on fait le changement de variable $x = z - \frac{b}{3}$ ce qui a pour effet de faire disparaître le terme quadratique, on obtient donc une équation de la forme :

$$z^3 + mz = n\,.$$

(L'utilisation du théorème du binôme permet de faire ces calculs facilement).

Puisque nous pouvons prendre n'importe quelle équation cubique et la transformer en une équation n'ayant pas de termes quadratiques, il suffit de savoir résoudre ces équations pour trouver la solution aux équations cubiques générales.

del-Ferro, Tartaglia et Cardan

La solution que nous allons présenter provient de ce qui est souvent appelé la méthode de Cardan, puisque cette méthode apparaît dans le livre d'algèbre de

Cardan, « Ars Magna », le Grand Art. Mais Cardan a appris à résoudre ces équations de Tartaglia dans un premier temps, puis de del-Ferro ensuite en ayant accès aux notes que del-Ferro avait laissées à son neveu Hannibal de la Nave peu avant de mourir. Il est donc plus approprié de parler de la méthode de del-Ferro – Tartaglia – Cardan.

La méthode

Cardan, en bon mathématicien italien de la Renaissance, utilise un langage géométrique pour mieux justifier le développement de la méthode. Il décompose un cube en morceaux de formes cubiques ou parallélépipédiques et écrit simplement l'équation obtenue en calculant la somme des volumes des différents morceaux et en comparant avec le cube entier. Avec les méthodes algébriques modernes, on obtient la même équation à partir du développement du binôme :

$$(t-u)^3 = t^3 + 3t^2(-u) + 3t^2u + (-u)^3.$$

On peut modifier cette expression en isolant les cubes et en observant que les autres termes sont tous facteurs de *(t-u)*. Après simplification, on obtient :

$$\left(t-u\right)^3 + 3tu(t-u) = t^3 - u^3.$$

Il suffit alors de poser $x = t - u$, $3tu = m$ et $t^3 - u^3 = n$ pour retrouver une équation du type $x^3 + mx = n$. Il ne reste qu'à montrer comment résoudre cette équation. En travaillant avec deux variables, t et u, plutôt qu'avec la seule variable x, Cardan se donne la marge de manœuvre nécessaire pour résoudre le problème.

Puisque $3tu = m$, on a u = $\dfrac{m}{3t}$.

Puisque $t^3 - u^3 = n$, on a $t^3 - \dfrac{m^3}{27t^3} = n$, ce qui nous conduit à une équation du sixième degré si on multiplie partout par t^3 :

$$t^6 - nt^3 - \frac{m^3}{27} = 0.$$

Cette équation est quadratique en t^3, ce qui nous permet de la résoudre facilement avec la formule des racines pour équations quadratiques. On obtient :

$t^3 = \dfrac{n}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}$. On n'a retenu que la racine positive de l'équation, un simple calcul permet de voir que rien ne change si on avait retenu la racine négative. Les deux conduisent à la même solution réelle de l'équation cubique originale.

Puisque $t^3 - u^3 = n$, on a aussi : $u^3 = \dfrac{-n}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{3}\right)^3}$

Finalement, puisque $x = t - u$, on peut écrire :

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{-n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Cette formule est souvent appelée « formule de Cardan », quoique « formule de del-Ferro, Tartaglia – Cardan » serait plus juste historiquement.

Deux exemples

Considérons l'équation $x^3+6x=20$. Ici, on a $m=6$ et $n=20$ et il suffit de substituer ces valeurs dans la formule pour obtenir : $x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$.

Il s'agit d'un effet indésirable de cette formule compliquée, on obtient une expression un peu tordue pour représenter la solution simple $x=2$, qu'on peut vérifier aisément avec une calculatrice.

Considérons maintenant un exemple encore un peu plus tordu : $x^3-51x=104$. Ici on a $m=-51$ et $n=104$, ce qui nous donne avec la formule :

$x=\sqrt[3]{52+\sqrt{-2209}}-\sqrt[3]{-52+\sqrt{-2209}}$. Ici, en raison du nombre négatif -2209 dans la racine, la calculatrice est inutile. On peut quand même simplifier algébriquement cette expression (on aurait pu aussi dans l'exemple précédent se passer de calculatrice et procéder algébriquement).

Premièrement, on a : $x=\sqrt[3]{52+47i}-\sqrt[3]{-52+47i}$. Ici, i est un nombre imaginaire qui satisfait à l'équation $i^2=-1$ et $47^2=2209$. Le premier à simplifier algébriquement ces expressions qui contiennent ces nombres imaginaires est le mathématicien Italien Bombelli qui, comme Cardan, a écrit un grand livre sur l'algèbre.

Bombelli s'est rendu compte, avec des manipulations algébriques simples, que $52+47i$ et $-52+47i$ sont des cubes parfaits (il suffit de poser par exemple $52+47i=(4+i)^3$, de développer le membre de droite avec le théorème du binôme et de simplifier le système d'équations quadratiques ainsi obtenu).

Bombelli a ainsi montré que $52+47i=(4+i)^3$ et $-52+47i=(-4+i)^3$. Puisque $x=\sqrt[3]{52+47i}-\sqrt[3]{-52+47i}$, on a finalement
$x=\sqrt[3]{(4+i)^3}-\sqrt[3]{(-4+i)^3}=(4+i)-(-4+i)=8$.

On vérifie facilement que 8 est solution de l'équation initiale.

Note historique finale

Les nombres de la forme $(a+bi)$ sont appelés aujourd'hui « nombres complexes ». Ils sont obtenus des nombres réels par une extension dite quadratique (on ajoute aux réels la racine i d'un polynôme quadratique, $x^2+1=0$).

Il est donc naturel de supposer que c'est l'étude des polynômes quadratiques qui a conduit à la découverte de ces nombres. L'histoire est parfois ironique, on sait maintenant que ces nombres ont été étudiés pour la première fois par Bombelli qui s'intéressait non pas aux équations quadratiques mais plutôt aux solutions des équations cubiques.

Cardan = Girolamo Cardano, 1501-1576 (Italie).
del-Ferro = Scipione del-Ferro, 1465-1526 (Italie).
Tartaglia = Niccolo Fontana, 1499-1557 (Italie).
Bombelli = Raphaël Bombelli, 1526-1572 (Italie).