Les différences finies et les formules de sommation.

Quelques formules de sommation

Plusieurs formules de sommation sont connues. Par exemple :

1. $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
4. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}$

La quatrième de ces sommes est une somme géométrique et les formules pour calculer ces sommes sont connues. Pour les trois premiers exemples, plusieurs ne savent pas en général comment trouver ces sommes. Si on connait une formule pour une somme donnée, on peut la vérifier avec une preuve par induction. Une question demeure : comment trouve-t-on ces formules?

Lorsque les formules sont de nature polynomiale, on peut utiliser les différences finies pour les découvrir. L'idée est basée sur le fait que les polynômes se comportent de la même façon avec les différences finies qu'avec les dérivées. Si la n^e différence finie est constante, on sait qu'on a un polynôme de degré n. Trouver les coefficients d'un polynôme est un petit jeu d'algèbre linéaire.

Les polynômes et les dérivées

La dérivée d'une fonction est obtenue en considérant la limite lorsque h tend vers 0 d'expressions du genre $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Géométriquement, ces dérivées donnent la pente de la tangente au graphe de la fonction $y = f(x)$ au point $(x,f(x))$. Les fonctions polynomiales sont faciles à dériver et on sait que la dérivée d'un polynôme de degré n est une fonction constante. Cela caractérise les polynômes de degré n.

Les polynômes et les différences finies

Les différences finies sont les expressions du genre $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{1}=f(x+1)-f(x)$.

Ces expressions sont semblables aux expressions utilisées pour calculer les dérivées, il suffit de prendre $h = 1$.

Les différences finies donnent donc une approximation raisonnable des dérivées et ont un comportement similaire. En particulier, la n^e différence finie d'un polynôme de degré n est constante. Pour utiliser les différences finies, on considère les valeurs entières pour x (généralement en débutant avec $n = 0$).

Afin d'utiliser les différences finies pour trouver une formule de sommation, il faut calculer quelques sommes (pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, …) et regarder les différences finies des valeurs trouvées. Cela donne les premières différences finies. Ensuite en prenant les différences finies des différences finies, on obtient les secondes différences finies. On procède comme cela jusqu'à ce qu'on obtienne des différences finies constantes. Cela se produira forcément si la formule est donnée par un polynôme. Ce sera toujours le cas si la quantité à sommer s'exprime elle-même par une équation polynomiale.

Utilisation des différences finies et de l'algèbre linéaire pour trouver une formule de sommation.

Supposons que nous voulions utiliser les différences finies pour trouver la formule pour la somme des carrés. On suppose que $P(n)$ est la somme des n premiers carrés. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
&P(0) = 0\\
&P(1) = 1\\
&P(2) = 1 + 4 = 5\\
&P(3) = 5 + 9 = 14\\
&P(4) = 14 + 16 = 30\\
&P(5) = 30 + 25 = 55\\
&P(6) = 55 + 36 = 91\\
&P(7) = 91 + 49 = 140
\end{aligned}$$

Écrivons ces valeurs sur une ligne, on obtient la ligne de $P(n)$.

Ensuite sur la seconde ligne, on écrit les différences des termes successifs de la première ligne, on obtient la ligne des premières différences finies qu'on notera $DP(n)$.

Sur la troisième ligne, on écrit les différences finies des termes de la deuxième ligne, on obtient la ligne des secondes différences finies qu'on notera $D^2P(n)$.

On poursuit ainsi pour obtenir les différences finies suivantes $D^3P(n), D^4P(n), \ldots$

On arrête lorsqu'on trouve une différence finie constante.

On a ainsi avec notre somme de carrés :

$P(n)$:	0	1	5	14	30	55	91	140
$DP(n)$:	1	4	9	16	25	36	49	
$D^2P(n)$:	3	5	7	9	11	13		

$D^3P(n)$: 2 2 2 2 2

La troisième différence finie est constante, on sait que la formule est donnée par un polynôme de degré 3. Donc, $P(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$.

Pour terminer, on doit trouver les coefficients *A, B, C, D*. Il y a quatre inconnues, on va se donner 4 équations en écrivant *P(0), P(1), P(2)* et *P(3)*.

$P(0) = D = 0$ (ainsi, on sait déjà que $D = 0$)

$P(1) = A + B + C + D = 1$

$P(2) = 8A + 4B + 2C + D = 5$

$P(3) = 27A + 9B + 3C + D = 14$

D = 0, on doit résoudre finalement un système de trois équations à trois inconnues

1) $A + B + C = 1$
2) $8A + 4B + 2C = 5$
3) $27A + 9B + 3C = 14$
4) ligne 2 moins 2 fois ligne 1 : $6A + 2B = 3$
5) ligne 3 moins 3 fois ligne 1 : $24A + 6B = 11$
6) ligne 5 moins 3 fois ligne 4 : $6A = 2$

On détermine alors par substitutions successives $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$ et $C = \frac{1}{6}$.

On a donc $P(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Il s'agit bien de la formule que nous avions annoncée au début.