Le grand théorème de Fermat pour n = 4.

Énoncé du théorème de Fermat-Wiles : Si n est un entier supérieur à deux, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières positives x, y et z.

Historique

Étude de l'équation $x^n + y^n = z^n$

Le cas où n est égal à 1 est sans intérêt puisque, pour n'importe quelle paire x et y d'entiers positifs, il existe un entier positif z tel que $x + y = z$.

Le cas $n = 2$ est plus intéressant et est connu depuis l'antiquité. Lorsque $x^2 + y^2 = z^2$, on dit que (x, y, z) est un triplet pythagoricien. Déjà les Babyloniens et les grecs de l'antiquité savaient comment fabriquer des triplets pythagoriciens. Nous utiliserons leurs propriétés pour démontrer le théorème de Fermat-Wiles pour $n = 4$.

Fermat lui-même savait démontrer ce théorème pour $n = 4$, Vers 1640 il a écrit dans son exemplaire du livre d'Arithmétique de Diophante qu'il savait comment démontrer le cas général. Il affirmait en avoir une preuve merveilleuse trop longue pour être écrite dans la marge du livre. Cela va intriguer les mathématiciens qui se demanderont « *quelle peut bien être cette preuve merveilleuse*? »

Par la suite, de nombreux mathématiciens, incluant des mathématiciens importants, vont se pencher sur ce théorème dont des cas particuliers de plus en plus nombreux seront démontrés au fil du temps. Parallèlement, et en grande partie grâce aux tentatives de démonstration du théorème de Fermat, c'est toute l'algèbre abstraite qui va se développer.

Finalement, le théorème a été démontré par Andrew Wiles, en 1995, 350 ans après Fermat. La démonstration utilise des mathématiques très sophistiquées non disponibles à l'époque de Fermat.

On ne saura jamais si Fermat avait une preuve du théorème, mais compte-tenu des limitations des mathématiques de son époque, c'est probablement faux. Fermat savait démontrer le cas $n = 4$, il avait peut-être une idée pour le cas $n = 3$. Et il croyait, sans doute à tort, pouvoir généraliser.

Les propriétés des triplets pythagoriciens primitifs

Si $x^2 + y^2 = z^2$, on dit que (x, y, z) est un triplet pythagoricien. Si x et y sont premiers entre eux, on dit que le triplet est primitif.

Il est facile de voir que si deux des trois nombres dans un triplet pythagoricien ont un facteur commun, le troisième aura aussi le même facteur. Donc si on suppose que x et y n'ont pas de facteurs communs, on sait que x et z ou y et z n'ont pas de facteurs communs non plus.

Il est également facile de voir que si deux des nombres x, y et z sont impairs, le troisième est pair car la différence ou la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Donc, sachant que si x, y et z sont premiers entre eux signifie que deux d'entre eux ne peuvent être pairs et sachant également que tous les trois ne peuvent être simultanément impairs, on sait que deux d'entre eux sont impairs et un seul pair. De plus, en regardant les congruences modulo 4 on voit que z ne peut être pair.

Ainsi, on a bien observé que dans un triplet pythagoricien primitif, z est impair et un de x et y est impair, l'autre est pair.

Supposons donc que x soit impair et y pair. Alors y, $z - x$ et $z + x$ sont tous pairs.

Posons $u = \frac{y}{2}, s = \frac{z+x}{2}, t = \frac{z-x}{2}$.

On vérifie que s et t sont premiers entre eux car $s + t =$ z et $s - t = x$ entraînent qu'un facteur commun à s et t est un facteur commun à x et z.

Nous observons que $u^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2 - x^2}{4} = \frac{(z+x)(z-x)}{4} = st$

Si $\frac{p}{q} = \frac{u}{t}$ avec $\frac{p}{q}$ fraction simplifiée ($u = \frac{pt}{q}$)

Alors $\frac{p^2}{q^2} = \frac{u^2}{t^2} = \frac{st}{t^2} = \frac{s}{t}$

D'où $p^2 = s, q^2 = t$ (unicité de la fraction simplifiée) et $u = \frac{pt}{q} = pq$

D'où on conclut : $\begin{aligned} y &= 2pq \\ x &= s - t = p^2 - q^2 \\ z &= s + t = p^2 + q^2 \end{aligned}$

Avec p et q premiers entre eux et de parité distincte (car $x = p^2 - q^2$ est impair)

La méthode de descente infinie

La méthode de descente infinie est une méthode ingénieuse développée par Fermat pour montrer qu'un problème dont la solution est donnée par des nombres entiers positifs n'a pas de solution.

Pour montrer qu'un tel problème n'a pas de solution, il suffit de montrer que si une solution existe, une nouvelle solution avec des entiers positifs strictement plus petits existe aussi.

Ceci est absurde car chaque nouvelle solution donne lieu à une nouvelle solution avec des entiers positifs plus petits, ce qui permet de créer une suite infinie d'entiers positifs strictement décroissante. Une telle suite strictement décroissante d'entiers positifs est appelée une descente infinie. Une descente infinie ne peut pas exister car, par le principe du bon ordre, tout ensemble non vide d'entiers positifs doit posséder un plus petit élément.

Ainsi, montrer que l'existence d'une solution en entiers positifs à un problème conduit à une descente infinie nous assure que ce problème n'a pas de solution en entiers positifs.

La preuve du théorème de Fermat Wiles dans le cas *n* = 4

Nous allons montrer en fait un résultat légèrement plus fort que le théorème de Fermat dans le cas $n = 4$.

Nous démontrons : Le problème $x^4 + y^4 = z^2$ ne possède pas de solution avec x, y et z entiers positifs.

(Clairement, une solution à $x^4 + y^4 = z^4$ est aussi une solution à $x^4 + y^4 = z^2$ car toute puissance quatrième est aussi un carré).

La preuve proposée n'est pas celle de Fermat, mais elle ne contient que des arguments connus de Fermat. Cette preuve existe dans la littérature depuis longtemps et ressemble à la preuve fournie par Euler au problème de Fermat dans le cas $n = 4$.

Preuve : Supposons que $x^4 + y^4 = z^2$. (x^2, y^2, z) est alors un triplet pythagoricien.

Puisque si d est facteur commun de x et y, d^2 sera facteur de z, si x et y ont un facteur commun d, il suffit de diviser toute l'équation par d^4 pour obtenir une nouvelle équation avec les différents termes premiers entre eux, en quel cas (x^2, y^2, z) est un triplet pythagoricien primitif. On peut donc se ramener à cette situation sans perte de généralité.

Il existe donc deux entiers positifs n et m premiers entre eux et de parités différentes avec

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2nm \\
y^2 &= n^2 - m^2 . \\
z &= n^2 + m^2
\end{aligned}
$$

Puisque $m^2 + y^2 = m^2 + (n^2 - m^2) = n^2$, (m, y, n) est aussi un triplet pythagoricien. Puisque n et m sont premiers entre eux, c'est un triplet primitif. Il existe donc p et q, premiers entre eux et de parités distinctes tels que

$$m = 2pq$$
$$y = p^2 - q^2$$
$$n = p^2 + q^2$$

On sait que m est pair car y est impair (car y^2 est impair dans le triplet (x^2, y^2, z)).

Donc, $x^2 = 2mn = 4pqn$ est un carré parfait alors que *p*, *q* et *n* sont premiers entre eux (*p* et *q* sont premiers entre eux, de plus, *n* et *m* sont aussi premiers entre eux d'où *m* et 2*pq* sont premiers entre eux ce qui entraîne *p*, *q* et *n* sont premiers entre eux). Donc *p*, *q* et *n* doivent être des carrés parfaits.

Il existe donc des entiers positifs x', y', z' tels que $(x')^2 = p, (y')^2 = q, (z')^2 = n$.

$p^2 + q^2 = n$ entraîne que $(x')^4 + (y')^4 = (z')^2$, solution au problème initial avec $z' = \sqrt{n} \le n^2 = z - n^2 < z$.

Si notre problème a une solution en entiers positifs, on peut fabriquer une nouvelle solution en entiers positifs plus petits. Cela conduit à une descente infinie et nous assure que le problème n'a pas de solution. Cela entraîne finalement que le problème de Fermat pour *n* = 4 n'a pas de solution.

Paul Deguire, 12 juillet 2017