Les fractions égyptiennes

D'après les textes mathématiques égyptiens qui sont parvenus jusqu'à nous, les égyptiens écrivaient les fractions comme une somme de fractions positives unitaires (numérateur égal à un) distinctes.

Par exemple on pouvait écrire $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$.

Mais on aurait aussi bien pu écrire $\frac{7}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

On voit donc que l'écriture en fraction égyptienne n'est pas unique.

En général nous préférerons les fractions égyptiennes qui n'ont pas trop de termes et dont les dénominateurs ne sont pas trop élevés. Ainsi, dans les écritures de $\frac{7}{10}$ ci-dessus, nous préférons la première qui utilise moins de fractions (2 contre 3) et dont le plus grand dénominateur est moins grand (5 contre 6).

Parfois la différence entre deux fractions égyptiennes est plus spectaculaire, on pourrait par exemple écrire $\frac{8}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ et c'est de loin préférable à l'écriture $\frac{8}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{61} + \frac{1}{3660}$.

Nous appellerons _fraction propre_ une fraction strictement comprise entre 0 et 1. Dans ce qui suit, nous ferons comme les égyptiens, nous ne mettrons que les fractions propres en fractions égyptiennes. Les autres fractions positives peuvent toutes s'écrire de manière unique comme une fraction propre plus un entier. Quant aux fractions négatives, elles n'intéressaient pas les égyptiens.

Un théorème et un algorithme

Dans son livre ***liber abaci*** (1202), Fibonacci présente un résultat qui non seulement montre que toute fraction propre peut s'écrire en fraction égyptienne, mais fournit un algorithme pour le faire.

Théorème : Soit $\frac{a}{b}$ une fraction propre. Si a est différent de 1, il existe un c tel que $\frac{1}{c} < \frac{a}{b} < \frac{1}{c-1}$. En fait on a que $\frac{a}{b} = \frac{1}{c} + \frac{ac-b}{bc}$ avec $ac - b < a$.

Ainsi, si on a $\frac{a}{b} = \frac{1}{c} + \frac{p}{q}$ avec $p < a$, on peut recommencer le processus avec $\frac{p}{q}$ et au bout d'un nombre fini d'étapes (qui ne dépasse pas *a-1*) nous avons une fraction égyptienne (qui a au plus *a* termes).

La preuve du résultat est immédiate, il suffit d'abord d'effectuer la soustraction $\frac{a}{b} - \frac{1}{c}$ et d'observer que $ac - b < a$ découle directement de $\frac{a}{b} < \frac{1}{c-1}$.

Voyons un exemple, reprenons la fraction $\frac{7}{10}$ que nous avions au début.

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}..$$

À première vue ce théorème semble nous dire tout ce qu'on veut savoir sur les fractions égyptiennes. Détrompons-nous. Il a un défaut majeur, souvent il conduit à des fractions égyptiennes contenant trop de termes parmi lesquels certains peuvent avoir de trop grands dénominateurs.

Un exemple nous convaincra des limites de ce théorème :

On peut écrire $\frac{4}{65} = \frac{1}{26} + \frac{1}{65} + \frac{1}{130}$. On verra plus loin comment trouver cette fraction.

Utilisons l'algorithme (le théorème) avec la fraction $\frac{4}{65}$.

$$\frac{4}{65} = \frac{1}{17} + \frac{4}{65} - \frac{1}{17} = \frac{1}{17} + \frac{3}{1105}.$$

$$\frac{3}{1105} = \frac{1}{369} + \frac{3}{1105} - \frac{1}{369} = \frac{1}{369} + \frac{2}{407745}.$$

$$\frac{2}{407745} = \frac{1}{203873} + \frac{2}{407745} - \frac{1}{203873} = \frac{1}{203873} + \frac{1}{83128196385}..$$

Ainsi, avec le théorème on obtient l'affreuse fraction égyptienne :

$$\frac{4}{65} = \frac{1}{17} + \frac{1}{369} + \frac{1}{203873} + \frac{1}{83128196385}.$$

Quelques trucs

Les égyptiens ne connaissaient peut-être pas le théorème de Fibonacci ou du moins ne l'employaient pas de manière explicite et souvent leurs fractions égyptiennes étaient plus belles que celles obtenues avec le théorème (moins de fractions, des dénominateurs plus petits). Ils avaient des trucs (ou de petits théorèmes simples) et des tables.

Voici certains des trucs utiles:

- Si *p* et *q* sont impairs : $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$.

Par exemple : $\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$.

- $\frac{3}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$.

Par exemple : $\frac{3}{82} = \frac{1}{41} + \frac{1}{82}$.

Similairement

- $\frac{4}{3n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n}$.
- $\frac{5}{4n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{4n}$.
- $\frac{7}{4n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n}$.

Puis finalement

- $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Ce dernier truc permet de se débarrasser d'un terme lorsqu'on obtient deux fractions ayant le même dénominateur.

Quelques exemples

Il est parfois utile de débuter avec le théorème et lorsqu'on tombe sur un truc simplificateur, on abrège la suite des choses. Parfois un truc se présente dès le départ et on n'a pas à utiliser le théorème.

- $\frac{5}{17} = \frac{1}{4} + \frac{5}{17} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{68} = \frac{1}{4} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68}$ (théorème plus forme $\frac{3}{2n}$).
- $\frac{7}{19} = \frac{1}{3} + \frac{7}{19} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{57} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33} + \frac{1}{209}$ (théorème plus forme $\frac{2}{pq}$).
- $\frac{7}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ (forme $\frac{7}{4n}$).

Autre méthode : les fractions identiques

Une manière efficace de trouver rapidement de bons résultats est d'écrire une fraction sous différentes formes$\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b} = \frac{4a}{4b}$ ..., en notant à chaque fois les diviseurs propres du dénominateur et en essayant d'en trouver un sous ensemble dont la somme est égale au numérateur.

Exemples :

- $\frac{5}{33} = \frac{10}{66} = \frac{6+3+1}{66} = \frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$ (diviseurs propres de 66 : 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33).
- $\frac{4}{65} = \frac{8}{130} = \frac{5+2+1}{130} = \frac{1}{26} + \frac{1}{65} + \frac{1}{130}$ (diviseurs propres de 130 : 1, 2, 5, 26, 65).

- $\frac{28}{77} = \frac{84}{231} = \frac{77+7}{231} = \frac{1}{3} + \frac{1}{33}$ (diviseurs propres de 231 : 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77).

Cette méthode conduit à plusieurs solutions différentes si on teste plusieurs « versions » de la même fraction.

Par exemple, nous avons aussi :

$\frac{28}{77} = \frac{56}{154} = \frac{22+14+11+7+2}{154} = \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{22} + \frac{1}{77}$ (diviseurs propres de 154 : 1, 2, 7, 11, 14, 22, 77).

Paul Deguire, août 2017

Erratum : À la fin de la vidéo nous disons que les diviseurs propres de 65 sont 1, 5 et 17. Il y a erreur, les diviseurs propres de 65 sont 1, 5 et 13.