La méthode des coefficients indéterminés et le théorème du binôme de Newton

Dans cette présentation nous verrons comment la simple multiplication de polynômes permet de trouver, par la méthode des coefficients indéterminés[1], la série de puissance associée à une fonction rationnelle et permet de vérifier des résultats particuliers obtenus avec le théorème du binôme de Newton[2].

Série de puissance d'une fonction rationnelle

Nous allons voir comment la méthode des coefficients indéterminés fonctionne à partir d'un exemple.

Soit $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x+x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + Ix^8 + \ldots$

Les coefficients de la série de puissances sont indéterminés, on doit les déterminer.

Si on effectue le produit du polynôme au dénominateur de la fonction par la série de puissance, on obtient :

$$1 + x = A + (A+B)x + (A+B+C)x^2 + (B+C+D)x^3 + \ldots + (G+H+I)x^8 + \ldots$$

La méthode des coefficients indéterminés consiste simplement à comparer les coefficients des puissances de x de chaque membre de cette égalité. Ainsi on a :

A=1

A+B=1 donc B = 0

A+B+C = 0 donc C = -1

B+C+D = 0 donc D = 1

C+D+E = 0 donc E = 0

D+E+F = 0 donc F = -1

E+F+G = 0 donc G = 1

F+G+H = 0 donc H = 0

---

[1] Ne pas confondre avec la méthode des coefficients indéterminée pour résoudre des équations différentielles linéaires. La méthode dont on parle est utilisée pour déterminer les coefficients d'un polynôme ou d'une série. Cette terminologie est assez ancienne, on la retrouve par exemple dans les cours de Fourier à l'École Polytechnique à la fin du 18e siècle.

[2] Newton n'a pas démontré rigoureusement son théorème du binôme, il s'est contenté de vérifier quelques cas particuliers en détail, avec la méthode que nous présentons ici.

On s’aperçoit (et on peut le montrer facilement) que les valeurs -1, 1 et 0 vont continuer à se répéter, dans cet ordre, pour les coefficients suivants. On a ainsi :

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - x^{11} + \ldots$$

ou encore $\dfrac{1+x}{1+x+x^2} = (1-x^2)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)$.

Vérifions si tout ceci a du sens.

La série $1+x^3+x^6+x^9+\ldots$ est une série géométrique de raison x^3, elle converge pour $|x^3| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ (elle ne converge pas en plus ou moins 1, le terme général ne tendant pas vers 0). Cette série géométrique converge vers $\dfrac{1}{1-x^3}$.

On a donc, $\dfrac{1+x}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x^2}{1-x^3} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$ ce qui montre que tout semble correct. En fait ce sont les propriétés de convergence très fortes des séries de puissance dans leurs intervalles de convergence qui justifient la méthode et notamment permettent de multiplier un polynôme et une série sans problème de convergence.

Théorème du binôme de Newton

Dans une formulation moderne simplifiée, le théorème du binôme de Newton peut s’écrire :

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}x^4 + \ldots$$

Lorsque r est un nombre entier positif, la série est un polynôme car tous les coefficients s’annulent à partir de (r - r). Lorsque r est 0, on a le résultat attendu $(1+x)^0 = 1$. Mais lorsque r n’est pas un entier positif, les coefficients ne s’annulent jamais et on a une série infinie.

Prenons $r = \frac{1}{2}$ comme cas particulier. Par le théorème du binôme de Newton, on a :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{3!}x^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{4!}x^4 + \ldots$$

et donc

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

Pour vérifier ses résultats, Newton n'a pas démontré son théorème, il a simplement effectué des produits de séries et vérifié au cas par cas que les résultats sont corrects.

Dans le cas qui nous intéresse, Newton écrit simplement :

$$(1+x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$(1+x) = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots\right)$$

Il suffit de multiplier ces séries pour obtenir

$$(1+x) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{-1}{8}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{1}{16} + \frac{-1}{16} + \frac{-1}{16} + \frac{1}{16}\right)x^3 + \left(\frac{-5}{128} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{-5}{128}\right)x^4 + \ldots$$

et finalement

$$(1+x) = 1 + x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots$$

ce qui est correct.

Newton a fait des vérifications semblables sur plusieurs exemples avec r fractionnaire ou r entier négatif et en général il vérifiait beaucoup plus de coefficients que ce que nous avons fait ici. Sans faire de démonstration rigoureuse des résultats, il était convaincu de leur véracité en raison de ses nombreux exemples élaborés qui fonctionnaient toujours. C'était typique de la rigueur en mathématique au 17^{e} siècle.

Paul Deguire, 30 mai 2017