Les nombres parfaits

Les diviseurs propres d'un entier positif

Les diviseurs propres d'un entier positif sont tous ses diviseurs positifs sauf lui-même.

Les diviseurs propres de 4 sont 1 et 2, on observe que 1 + 2 = 3 < 4.

Les diviseurs propres de 6 sont 1, 2 et 3, on observe que 1 + 2 + 3 = 6

Les diviseurs propres de 12 sont 1, 2, 3, 4 et 6, on observe que
1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12.

Les nombres parfaits : définition et exemples.

Un nombre parfait est un entier positif qui est égal à la somme de ses diviseurs propres. Comme on l'a observé plus haut, 6 est un nombre parfait. C'est le plus petit nombre parfait, les deux suivants sont 28 et 496.

6 = 1 + 2 + 3

28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14

496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248

En décomposant ces nombres en produits de facteurs premiers, on remarque quelque chose de très intéressant :

$$6 = 2 \times 3 = 2^{2-1} \times \left(2^2 - 1\right)$$

$$28 = 4 \times 7 = 2^{3-1} \times \left(2^3 - 1\right)$$

$$496 = 16 \times 31 = 2^{5-1} \times \left(2^5 - 1\right)$$

Chaque nombre parfait semble être égal au produit de $2^{p-1} \times \left(2^p - 1\right)$ avec p et $2^p - 1$ simultanément premiers

Le théorème IX.36 des Éléments d'Euclide

On peut vérifier facilement que $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Sachant cela, le théorème suivant se démontre sans difficultés :

Théorème (Euclide IX.36) : Si p et $2^p - 1$ sont simultanément premiers, alors le nombre n = $\left(2^p - 1\right) \times 2^{p-1}$ est un nombre parfait.

Démonstration : Posons $Q = 2^p - 1$. Alors, Q et 2 sont les seuls facteurs premiers de n et il est facile d'écrire tous les diviseurs propres de n.

Ceux qui n'ont pas Q comme facteur : $1, 2, 4, ..., 2^{p-1}$. Leur somme est $2^p - 1$.

Ceux qui ont Q comme facteur : $Q, 2Q, 4Q, ..., 2^{p-2}Q$. Leur somme est $(2^{p-1} - 1) \times Q$.

Puisque $Q = 2^p - 1$, la somme de tous les diviseurs de n est donc égale à $(2^p - 1)(1 + 2^{p-1} - 1) = (2^p - 1)2^{p-1} = n$. Ainsi, n est bien un nombre parfait.□

Suite à ce théorème, les problèmes ouverts suivants sur les nombres parfaits persistent :

1. Y-a-t-il d'autres nombres parfaits pairs que ceux décrits dans le théorème d'Euclide?
2. Y-a-t-il une infinité de nombres parfaits pairs?
3. Y-a-t-il des nombres parfaits impairs?

Les connaissances modernes sur les nombres parfaits

La réponse au premier de ces problèmes ouverts a été fournie par Leonhard Euler au 18^{e} siècle, plus de 2000 ans après Euclide. En fait le théorème d'Euler est la réciproque du théorème d'Euclide. Ensembles ces théorèmes décrivent parfaitement les nombres parfaits pairs.

Théorème (Euler) : Si n est un nombre parfait pair, alors n est de la forme $(2^p - 1)2^{p-1}$ avec p et $2^p - 1$ premiers simultanément.

On a donc le théorème d'Euclide-Euler : n est un nombre parfait pair si et seulement si n est de la forme $(2^p - 1) \times 2^{p-1}$ avec p et $2^p - 1$ premiers simultanément.

Cela dit, on ne sait toujours pas si ces nombres parfaits pairs sont en nombre infini ou s'il existe un nombre parfait impair.

Nombres premiers de Mersenne et grands nombres parfaits

Les nombres premiers de la forme $2^p - 1$ avec p premier sont appelés nombres premiers de Mersenne. Mersenne était un mathématicien français du 17^{e} siècle qui s'intéressait à ces nombres. Notons que si p n'est pas premier, par exemple si $p = ab$, alors $2^a - 1$ et $2^b - 1$ sont tous deux diviseurs de $2^p - 1$ qui ne peut donc pas être premier. L'exposant p dans un nombre premier de Mersenne est donc toujours premier (condition nécessaire et non suffisante).

Il est facile d'étudier la primalité des nombres de la forme $2^p - 1$ (vérifier s'ils sont premiers). Pour cette raison, depuis longtemps, le plus grand nombre premier connu est toujours un nombre premier de Mersenne. Il existe une grande opération de recherche internationale qui vise à trouver les nombres premiers de Mersenne. Nous en connaissons maintenant 49, le 49^{e} ayant été découvert le 7 janvier 2016. Nous ne savons pas si les 49 nombres premiers de Mersenne connus sont les 49 plus petits, il se pourrait qu'il y en ait un ou deux autres, plus petits que le 49e et non encore découverts.

Le 49e nombre premier de Mersenne est $2^{74207281}-1$. Ce nombre permet de fabriquer le 49e nombre parfait connu et le plus grand à ce jour : $n=\left(2^{74207281}-1\right)\times 2^{74207280}$. Un petit nombre d'à peine 44677235 chiffres.