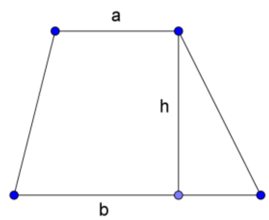
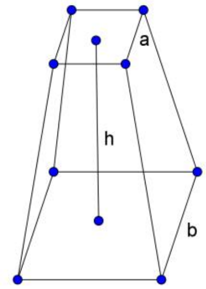
# Le calcul du volume des pyramides tronquées




La figure de gauche représente un trapèze de hauteur h, de grande base b et de petite base a.  Les bases sont parallèles.

Son aire est donnée par la formule : $A = h \times \left(\frac{a+b}{2}\right)$

L'aire est donc égale à la hauteur multipliée par la moyenne arithmétique des longueurs des deux bases.

Le trapèze peut être vue comme un triangle de base b auquel on a enlevé un petit triangle de base a.  C'est un triangle tronqué.

La figure en haut à droite représente une pyramide tronquée de hauteur h, sa grande base est un carré de côté b et sa base supérieure est un carré de côté a. Les bases sont parallèles.

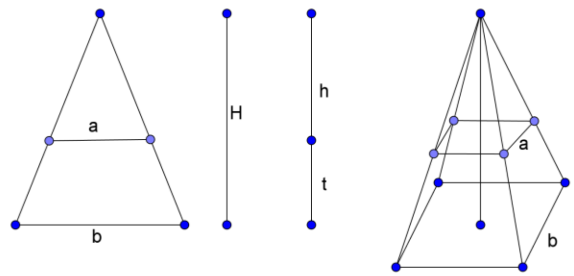
Son volume est donné par la formule $V = h \times \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right)$

Le volume est donc égal à la hauteur multipliée par la moyenne héronienne entre les aires des deux bases.

La pyramide tronquée est une pyramide de base carrée de côté b à laquelle on a enlevé une petite pyramide de base carrée de côté a.

Pourquoi doit-on prendre la moyenne arithmétique dans un cas et la moyenne héronienne dans l'autre cas?  Existe-t-il une formule plus générale qui regroupe ces deux formules? La meilleure stratégie pour répondre à ces questions est de chercher ce qu'il y a de similaire dans les deux situations.

Le triangle peut être vu comme une pyramide en dimension 2.




Dans chaque cas, on calcule la mesure de la pyramide tronquée en calculant la mesure de la grande pyramide de hauteur H et de base de côté b moins la mesure de la petite pyramide de hauteur h et de base de côté a.

Par similitudes (triangles semblables) on a : $\frac{a}{h}=\frac{b}{H}=\frac{b-a}{t}$.

Donc, $h=\frac{at}{b-a}$ et $H=\frac{bt}{b-a}$.

L'aire du triangle de hauteur h et de base a est donnée par : $A=\frac{h\times b}{2}$, on doit donc calculer $\frac{H\times b}{2}-\frac{h\times a}{2}=\frac{bt\times b}{2(b-a)}-\frac{at\times a}{2(b-a)}=t\times\left(\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}\right)=t\times\left(\frac{b+a}{2}\right)$

Le volume de la pyramide de hauteur h et de base carrée de côté a est donné par : $V=\frac{h\times a^2}{3}$, on doit donc calculer :

$$\frac{H\times b^2}{3}-\frac{h\times a^2}{3}=\frac{bt\times b^2}{3(b-a)}-\frac{at\times a^2}{3(b-a)}=t\times\left(\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}\right)=t\times\left(\frac{b^2+ab+a^2}{3}\right)$$

Il semble alors qu'en dimension n (vérifié pour n = 2 et 3) ont ait que la mesure de la « pyramide » tronquée de hauteur t, de grande base de côté b et de petite base de côté a soit donné par la formule : $M=t\times\left(\frac{b^n-a^n}{n(b-a)}\right)$.

Lorsque n est égal à deux on retrouve la moyenne arithmétique après simplification.

Lorsque n est égal à trois on retrouve la moyenne héronienne après simplification.

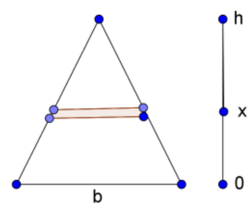
## En dimension supérieure ?

Cette formule reste-t-elle vraie lorsqu'on passe en dimension supérieure? C'est-à-dire lorsqu'on considère des hyper pyramides de dimension quatre ou plus avec comme base des cubes ou hyper cubes de dimension trois ou plus.

Pour faire cette vérification dans le cas général, il faut s'assurer que la mesure d'une hyper pyramide de dimension n, de hauteur h, dont la base est un hyper cube de dimension n-1 de côté b est donnée par la formule : $M = \frac{h \times b^{n-1}}{n}$.

En quel cas, avec les mêmes H, h, t, b et a que ci-dessus, on obtiendrait que la mesure de l'hyper pyramide tronquée de hauteur t, de grande base de côté b et de petite base de côté a, est donnée par la formule : $M = \frac{H \times b^{n-1}}{n} - \frac{h \times a^{n-1}}{n}$ ce qui après exactement les mêmes simplifications que dans les exemples ci-dessus nous donne : $M = t \times \frac{b^n - a^n}{n(b-a)}$. Il suffit donc de vérifier la formule de la mesure de l'hyper pyramide pour pouvoir conclure.

Vérifions cette formule.




La figure montre une coupe plane d'une pyramide ou d'une hyper-pyramide. Elle est de hauteur h et sa base est un cube ou un hyper cube de côté b. Pour trouver la mesure de la petite tranche de pyramide à la hauteur x, on doit savoir la largeur de la pyramide (le côté de sa base) à cette hauteur.

On cherche une fonction linéaire de forme L(x) = px + q qui satisfasse à L(0) = b et L(h) = 0. On trouve facilement que L(x) = $-\frac{b}{h}x + b$.

Si nous sommes en dimension n, la base à la hauteur x sera un cube (ou hyper cube) de dimension n-1 et sa mesure sera $\left(-\frac{b}{h}x + b\right)^{n-1}$ et ainsi la mesure de la tranche d'épaisseur $\Delta x$ à la hauteur x sera égale à $\left(-\frac{b}{h}x + b\right)^{n-1} \Delta x$

Pour trouver la mesure totale il suffit de calculer l'intégrale simple
M = $\int_0^h \left(-\frac{b}{h}x + b\right)^{n-1} dx$

Le changement de variable $u = (-\frac{b}{h}x + b)$ simplifie considérablement cette intégrale, on doit maintenant calculer M = $\frac{h}{b}\int_0^b u^{n-1}du = \frac{h}{b} \times \frac{b^n}{n} = \frac{h \times b^{n-1}}{n}$.

On obtient bien le résultat prévu, la formule est démontrée en toute dimension $n \geq 2$.

## Une anecdote historique

Les babyloniens étaient réputés meilleurs mathématiciens que les égyptiens. Nos connaissances historiques sur les mathématiques de ces deux civilisations le confirment amplement. Mais s'il y a un domaine où les égyptiens ne se laissaient pas damer le pion par les babyloniens, c'est dans le calcul du volume d'une pyramide tronquée.

Dans le papyrus de Moscou, une des deux sources principales des mathématiques égyptiennes, le problème numéro 14 demande de calculer le volume d'une pyramide tronquée. La formule indiquée pour ce calcul est la bonne formule, soit la hauteur multipliée par la moyenne héronienne des aires des bases.

Quant à eux, les babyloniens approximaient le volume de la pyramide tronquée en utilisant la fausse formule, qui généralise la formule de l'aire d'un trapèze, soit la hauteur multipliée par la moyenne arithmétique des aires des bases.

Ainsi, les égyptiens, à défaut d'être de grands mathématiciens, ont été capables de confirmer mathématiquement qu'ils étaient des grands connaisseurs en pyramides.