Trois étapes de l'histoire des nombres réels

Pour les anciens pythagoriciens, tout était nombre. La découverte des harmoniques musicales, représentables par des quotients de nombres entiers, a suggéré aux pythagoriciens que même ce qui n'était pas à première vue mathématique s'exprimait mathématiquement, à l'aide de nombres et plus précisément, à l'aide de nombres rationnels. Ce qui intéressait les grecs, souvent davantage que les nombres eux-mêmes, c'étaient les proportions entre les nombres ou entre les grandeurs géométriques (mesures de longueur, d'aires ou de volumes). Dire que tout est nombre rationnel signifiait que ces proportions étaient toujours rationnelles, donc qu'entre deux unités à comparer il y avait toujours une petite quantité qui entrait un nombre entier de fois (disons m) dans la première et un nombre entier de fois (disons n) dans la seconde, la proportion entre ces deux quantités, la première par rapport à la deuxième, était donc représentée par le nombre rationnel $\frac{m}{n}$.

Les mathématiques des pythagoriciens tenaient donc pour acquis que les quantités et les nombres avec lesquels ils travaillaient étaient toujours commensurables (ce qui signifie qu'ils étaient mesurés par la même mesure, commune aux deux et entrant un nombre entier de fois dans chacun). Bien sûr, les grecs ne comparaient que des choses comparables : des nombres avec des nombres, des longueurs avec des longueurs, des aires avec des aires, des volumes avec des volumes. Plusieurs de leurs théorèmes utilisaient explicitement cette hypothèse que tous les nombres sont commensurables, ou que toutes les quantités comparables sont commensurables. Puisque ceci est équivalent à dire que tous les nombres sont rationnels, la découverte des nombres irrationnels, par un membre de l'école de Pythagore dont l'histoire a oublié le nom, provoqua une véritable crise dans les mathématiques grecques.

Eudoxe et Euclide

Première étape : il faut savoir travailler avec tous les types de nombres.

On dit souvent qu'Archimède était le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Eudoxe, qui vivait au 4^{e} siècle avant Jésus Christ est probablement le second. Il est surtout connu pour sa méthode d'exhaustion, essentiellement du calcul intégral, brillamment utilisée par Archimède pour calculer des aires de paraboloïdes et le volume de la sphère. Le contenu du livre 5 des Éléments d'Euclide est attribué à Eudoxe. Il contient une théorie très puissante qui permet de comparer des grandeurs, en utilisant des comparateurs rationnels, même lorsque ces grandeurs sont irrationnelles.

Le livre 10 des Éléments d'Euclide est aussi réputé reprendre les travaux d'Eudoxe, On y trouve notamment la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Les théories développées par Eudoxe et présentées par Euclide dans ses Éléments ont permis de remettre les mathématiques grecques sur les rails et de complètement mettre fin à la crise provoquée par le découverte des nombres irrationnels.

Même si Eudoxe est vu comme un précurseur de certaines théories sur la construction des nombres réels qui ont vu le jour au 19^{e} siècle, il faut placer les choses dans leur contexte : Eudoxe n'a sans doute jamais pensé aux nombres réels comme à un ensemble de nombres qu'on pouvait construire à partir des entiers et dont on pouvait étudier les propriétés. Cette manière ensembliste de voir les choses est très récente.

Simon Stevin et les nombres décimaux

Deuxième étape : il faut savoir représenter correctement les nombres réels.

Simon Stevin est un mathématicien et scientifique flamand ayant vécu de 1548 à 1620. Il est reconnu entre autre pour avoir contribué à introduire en Europe les nombres décimaux et à en proposer un usage généralisé. Plus important, vers 1600, il fût le premier mathématicien à avoir une idée claire des nombres réels. Pour lui, les nombres négatifs, les racines carrées et les autres irrationnels étaient des nombres au même titre que les rationnels. Tous ces nombres avaient une représentation décimale et les nombres réels n'étaient rien de plus que l'ensemble de toutes les représentations décimales possibles. Ces idées vont se répandre en Europe au cours des deux siècles qui suivent. Ce qui était nouveau et révolutionnaire à l'époque de Simon Stevin est devenu maintenant la façon correcte pour chacun de nous de voir les nombres réels. La manière discrète de voir les nombres, depuis les grecs, était remplacée par la manière continue de les voir. Les nombres réels forment un continuum et nous sommes capables de représenter numériquement les nombres réels par leurs représentations décimales avec lesquelles on sait utiliser les opérations arithmétiques.

Les coupures de Dedekind

Troisième étape : il faut savoir comment construire les nombres réels.

La rigueur a fait défaut à l'analyse depuis les premiers pas du calcul différentiel et intégral au 17^{e} siècle jusqu'au 19^{e} siècle où il devient évident que certaines notions comme la convergence ou la continuité devaient être définies correctement si on voulait éviter les paradoxes de plus en plus nombreux qui apparaissaient çà et là lorsque l'on jouait avec l'infini.

Parallèlement au besoin de définir rigoureusement les concepts mathématiques, on sentit le besoin de faire comme les grecs, de tout construire avec précision et rigueur à partir de quelques définitions de bases et d'une démarche axiomatique.

Le mathématicien allemand Leopold Kronecker est célèbre pour la citation suivante : « *Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme* ». Alors, si on prend Kronecker au mot, à partir des nombres entiers, comment l'homme s'est-il pris pour construire les nombres réels?

La construction la plus connue est celle de Dedekind. La construction des nombres rationnels à partir des entiers est facile et était connue depuis longtemps. Les nombres rationnels sont simplement des classes d'équivalence de quotients de deux nombres entiers avec dénominateur non nul. Les différentes opérations arithmétiques ainsi que la relation d'ordre sur les rationnels découlent de leur construction. Le passage des rationnels aux nombres réels était plus difficile. Dedekind a franchi ce passage avec la notion qu'on appelle aujourd'hui les coupures de Dedekind.

Intuitivement, une coupure de Dedekind est la partition de Q, l'ensemble des rationnels, en deux sous-ensembles A et B satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1. A et B sont disjoints
2. L'union de A et de B donne Q
3. Tout élément de a est inférieur strictement à tout élément de B

Voici trois exemples qui illustrent les trois situations qui peuvent se produire

a) A possède un plus grand élément, B ne possède pas de plus petit élément. Par exemple : A = $\{x \in Q \,/\, x \leq 5\}$ et B = $\{x \in Q \,/\, x > 5\}$

   Cette coupure représente le nombre réel 5.
b) A ne possède pas de plus grand élément, B possède un plus petit élément.

   Par exemple : A = $\left\{x \in Q \,/\, x^3 < \frac{8}{27}\right\}$ et B = $\left\{x \in Q \,/\, x^3 \geq \frac{8}{27}\right\}$

   Cette coupure représente le nombre réel $\frac{2}{3}$
c) A ne possède pas de plus grand élément et B ne possède pas de plus petit élément.
   Par exemple A = $\{x \in Q \,/\, x^5 < 10\}$ et B = $\{x \in Q \,/\, x^5 > 10\}$

   Cette coupure représente le nombre irrationnel $\sqrt[5]{10}$

Ces trois exemples représentent tous les cas possibles mais présentent une ambiguïté, un nombre rationnel peut être représenté par deux coupures différentes (respectivement de type a) et b) comme ci-dessus). Pour lever cette ambigüité, Dedekind a défini une coupure comme suit :

Une coupure de Q est une partie A de Q telle que

a) A est non vide et distinct de Q
b) Pour chaque a $\in$ A et b $\in$ Q, si b < a, alors b $\in$ A
c) A ne possède pas de plus grand élément

L'ensemble R des nombres réels est simplement l'ensemble des coupures de Dedekind. On peut montrer que l'ensemble de ces coupures est un ensemble totalement ordonné (par l'inclusion) et on peut définir l'addition et la multiplication de deux coupures de manière à montrer que les nombres réels forment un corps. Par exemple, l'addition est simplement définie comme suit :

$$c \in A + B \Leftrightarrow \text{il existe } a \text{ dans } A \text{ et } b \text{ dans } B \text{ tels que } c = a + b.$$

L'ensemble R de ces coupures ainsi défini est un corps totalement ordonné dans lequel tout ensemble borné supérieurement possède une plus petite borne supérieure. Cela caractérise les nombres réels.

D'autres constructions des nombres réels sont possibles, par exemple avec les suites de Cauchy de nombres rationnels.

Conclusion

Après avoir montré l'existence de nombres non rationnels et appris à les manipuler, après avoir appris à représenter correctement ces nombres et après avoir appris à les construire à partir des nombres entiers, est-ce que tout a été dit?

Il reste une question à répondre, quelle est la cardinalité de l'ensemble des nombres réels? (autrement dit, combien y a-t-il de nombres réels)?

Les mathématiciens ont été étonnés de découvrir au 19e siècle qu'il n'y a pas plus de nombres rationnels que de nombres entiers. On peut établir une bijection entre ces ensembles (une relation biunivoque qui associe à chacun des éléments de deux ensembles un et un seul élément de l'autre ensemble). Pourtant, intuitivement, l'ensemble des nombres rationnels a l'air infiniment plus gros que l'ensemble des nombres entiers. Partant de cet exemple on peut être amené à penser que tous les ensembles infinis ont la même cardinalité, qu'on trouvera toujours une bijection entre un ensemble infini quelconque et l'ensemble des entiers, autrement dit une manière d'énumérer ses éléments. Cantor a montré vers la fin du 19e siècle qu'il n'y a pas de bijection entre les nombres réels et l'ensemble des entiers. On ne peut pas énumérer les nombres réels, il y en a trop. L'ensemble des nombres réels a donc une cardinalité différente de la cardinalité des entiers ou des rationnels.